郑崇友
樊　磊
崔宏斌　著

FRAME与连续格

首都师范大学出版社

Frame与连续格

郑崇友　樊　磊　崔宏斌　著

首都师范大学出版社

Zheng Chong-you

Fan Lei

Cui Hong-bin

Introduction to Frames and Continuous Lattices

Capital Normal University Press,

Beijing, China

（京）新208号

国家自然科学基金资助项目

The Project supported by the National Natural Science Foundation of China

Frame与连续格

著　者	郑崇友　樊　磊　崔宏斌
出版发行	首都师范大学出版社
社　址	北京西三环北路105号(邮政编码100037)
经　销	全国新华书店
印　刷	三河科教 印刷厂 印刷
开　本	850×1168　1/32　印　数 0,001—1,000册
字　数	200 千字　印　张 7.75
版　本	1994年 6 月　第1版
	1994年 6 月　第1次印刷
书　号	ISBN7-81039-114-3/G·101
定　价	8.10 元

内容简介

本书系统地论述Frame理论(或Locale理论)与连续格理论的基本内容。全书共分四章，第1章是关于范畴理论的基本知识的介绍；第2章介绍偏序集与格，着重讨论偏序集上的伴随函子理论；第3章论述Locale理论的基本内容，以及Frame理论研究中的一些新结果；第4章论述连续格理论中的两个主要部分，即以连续偏序集的Lawson-Hoffmann理论为核心，采用极小集方法讨论连续偏序集与完全分配格之间的关系，以及通过集中连续格理论中的几个基本结果探讨连续格与Lawson交半格、Locale和T_0空间范畴之间的联系，等等。

本书适合作为高等学校数学系的本科生选修课与研究生的教材，也可供高等学校理工专业师生和研究工作者阅读参考。

前　言

自从F. Hausdorff在1914年引进开集(或邻域)作为研究抽象空间中连续性的基本概念之后，虽然拓扑空间就可视为是一种具有由某些开集构成的格结构的对象，但是拓扑与格论之间的联系引起人们的重视却是到了30年代末期M.H.Stone关于Boole代数与分配格的拓扑表示定理出现之后. Stone表示定理表明可以从纯代数的结构出发得到拓扑学中若干有趣的空间，并且运用格论的方法与技巧对这些空间的特性进行研究，从而得出关于拓扑学中带有普遍意义的结论. 这种借助于代数学求得拓扑学自身发展的方法，常常是很有成效的. 到了50年代，这一领域的研究成果已相当丰富. 然而这时格论仍是作为一种工具出现的，它的最终目的还在于研究拓扑空间的本身.1957年，C.Ehresmann提出了一种新的观点[21]，他认为具有某种分配性的格（如完备Heyting代数）本身就有作为一种广义拓扑空间的研究价值，而不论它是否可以表示为某一拓扑空间的开集格. 在这种新的观点的影响下使研究工作发生了根本变化，后来的研究工作表明这种融拓扑结构与序结构于一体的探讨是有其特色的. 1982年出版的P. T. Johnstone的著作《Stone Spaces》是对这一领域的研究工作的系统而科学的总结[54].这样，经C.Ehresmann的倡导而发展起来的研究工作，称之为Frame理论，或Locale理论. 它成为通常称为格上拓扑学的一个重要分支，又因为其研究方法一般不涉及点的概念，也称之为无点式拓扑学. 连续格理论也是对某类格的研究. 连续格概念是D. Scott于1971年

因理论计算机问题的需要而提出的[32]。在连续格文献中，这个提法是在D. Scott的一篇题为“Continuous Lattices”的论文中第一次出现的[114]。这篇论文的发表极大地推进了连续格理论的研究，大约在同一时期，K.H. Hofmann和J. D. Lawson等在紧拓扑半格，格与格序代数的谱理论等方面的深入工作，从不同的途径发展了连续格理论[32]，建立了它与数学的其它分支，尤其是与Frame理论的联系。鉴于连续格理论与计算机科学、代数学、分析学和拓扑学等学科的密切联系，因此引起了广泛的注意。近20多年来取得了一系列引人注目的重要研究成果，如文献[3，32，44，45，54，93]等。目前，连续格理论的研究正处于活跃时期，有大量的相关问题等待解决，如文献[32]中提出的问题，其中一部分问题至今仍未解决，以及J. D. Lawson和M. Mislove在文献[63]中从拓扑学和Domain理论的交叉角度提出了未解决的许多公开问题，等等。

前面提到的两部著作[32，54]都是出版于十年前的名著。近十年来，我国学者在Frame(或Locale)理论与连续格理论的研究中也有许多出色工作，除了在文献[87](自然科学年鉴，1989年)中已作介绍外，还有[27，89，128，157，167，175]等。然而，迄今我国还没有一部介绍Frame理论与连续格理论的著作。为了弥补这点不足，国内许多学者完全可以成为更权威的作者，但是他们无暇顾及于此，所以我们也就努力地编写了本书。它系统地论述了Frame理论和连续格理论的基本内容，其中也包含了我国学者近些年来在这些领域的一些研究成果。全书共分四章，第1章为范畴论，它作为一种理论对于数学的许多分支，以及它们之间联系的研究起着重要的作用，本章介绍范畴理论的基本知识；第2章为格论，这一章除了讲述偏序集与格的基本概念和相关知识外，着重讨论与本书主题相关联的偏序集上伴随函子理论；第3章为Locale与拓扑空间。本章论述Locale理论的基本知识，以及Frame理论研究中的若干新结果，特别是为

Locale理论对于L-fuzzy拓扑学的应用提供一些线索；第4章为连续格理论，这一章以连续偏序集的Lawson-Hoffmann理论为核心，采用近些年来我国学者所强调的极小集方法讨论连续偏序集与完全分配格之间的关系，以及通过集中连续格理论中的几个基本结果探讨连续格与Lawson交半格、Locale和T_0空间范畴之间的联系，等等。应当指出，本书并不是一部已经完善的著作，在这些领域中的许多研究成果和新近进展都没有被介绍进来，其中一部分只是作为参考文献列举在书末。特别是本书所论述的理论有许多都正在发展之中，所以作者非常希望本书能起到抛砖引玉的作用，期望着在不久将来见到更好的著作出版。

本书写作过程中受到了四川大学副校长刘应明教授、陕西师范大学校长王国俊教授、国家教育委员会师范司司长金长泽教授、西安交通大学研究生院副院长张文修教授与徐州师范学院王戈平教授等的热情鼓励和大力支持；又首都师范大学出版社的同志们为本书的出版给予了热情的帮助和付出了辛勤的劳动，在此一并致以诚挚的谢意。

由于作者的学识和水平所限，书中错误与不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

本书的写作得到了国家自然科学基金的资助，它的出版得到了首都师范大学校长出版基金的资助。

郑崇友

1994年1月于首都师范大学

目　　录

Contents

第1章 范 畴 论

范畴是从数学的各个领域中概括出来的一个高度抽象的数学系统。对其研究始于Eilenberg和MacLane在代数拓扑学中的工作，它是在1945年被正式提出的。这种理论提出之后就受到普遍重视而迅速发展起来，并且被引进到数学的许多分支中。范畴论作为一种理论，它对于数学的许多分支以及它们之间的联系起着重要作用。本章介绍范畴论中的基本概念和相关的基本知识，如范畴、函子、自然变换、泛态射、极限、伴随函子、范畴等价和Monad等概念，以及它们的基本性质。对于乘积、余积、等化子、余等化子、拉回与推出等概念，在本章中均作为极限或余极限概念的特例处理的。

§1.1 范 畴

(1.1.1) 定义 一个范畴C由下列内容组成：

(i) 一个对象类 $ob(C)$，$ob(C)$的元称作C中对象，通常用A，B，…表示；

(ii) 对于C中对象的每个有序偶(A, B)对应一个集$Hom_C(A,B)$，或简记$Hom(A, B)$。$Hom(A, B)$的元称作C中以A为定义域，以B为值域的态射。若$f\in Hom(A, B)$，则记作f: $A\to B$，或$A\xrightarrow{f}B$；

(iii) 对于C中对象的每个有序三元组(A, B, C)对应一个称作合成(或复合)的映射

$$Hom(A,B)\times Hom(B,C)\to Hom(A,C)$$
$$(f,g) \longmapsto gf,$$

gf称作f和g的合成(或复合).

要求$\mathbf{C}$中对象与态射满足下列公理:

(Ⅰ)若$(A, B) \neq (C, D)$, 则$Hom(A, B) \cap Hom(C, D) = \phi$;

(Ⅱ)若$f \in Hom(A, B)$, $g \in Hom(B, C)$和$h \in Hom(C, D)$, 则$(hg)f = h(gf)$;

(Ⅲ)$\forall A \in ob(\mathbf{C})$, 存在$id_A \in Hom(A, A)$使得$\forall f \in Hom(A, B)$与$\forall g \in Hom(C, A)$, 有

$$f id_A = f \text{ 与 } id_A g = g,$$

id_A称作A上恒同态射.

若范畴$\mathbf{C}$中对象类$ob(\mathbf{C})$是集, 则称范畴$\mathbf{C}$为小范畴.

(1.1.2)**命题** 若A是范畴$\mathbf{C}$中对象,则A上恒同态射是唯一的.

证明 设id_A, $id'_A \in Hom(A, A)$均是A上恒同态射, 则由恒同态射的定义, 有

$$id_A = id_A \; id'_A = id'_A.$$

这表明A上恒同态射是唯一的.

(1.1.3)**例**

(i)$\mathbf{Set}$, 集与映射的范畴.即$ob(\mathbf{Set})$是全体集构成的类, 对于$X, Y \in ob(\mathbf{Set})$, $Hom(X, Y)$是所有映射$f: X \to Y$构成的集, 并且$\mathbf{Set}$中态射的合成 是映射的合成.

(ii)$\mathbf{Sp}$: 拓扑空间与连续映射的范畴.

(iii)$\mathbf{Grp}$: 群与同态的范畴.

(iv)$\mathbf{O}$: 空范畴.

(v)设X是集, 则存在一个范畴, 其对象类是集X, 并且仅有的态射是恒同态射. 称此范畴为离散(小)范畴. 该范畴可与集X等同看待.

(1.1.4)**定义** 设$\mathbf{C}$与$\mathbf{D}$都是范畴. 若

(i)$ob(\mathbf{D})$是$ob(\mathbf{C})$的子类;

(ii)对于$\mathbf{D}$中任意对象A和B,有

$$Hom_D(A,B)\subseteq Hom_C(A,B),$$

并且D中态射的合成以及每一对象上恒同态射都与C中相同，则称D是C的子范畴。

若范畴D是范畴C的子范畴，并且对于D中任意对象A和B有

$$Hom_D(A,B)=Hom_C(A,B),$$

则称D是C的满子范畴。

(1.1.5)例 集与单射(或满射或双射)的范畴是范畴Set的子范畴，但不是满子范畴。有限集与映射的范畴是范畴Set的满子范畴。

(1.1.6)定义 设C_1与C_2都是范畴，则存在一个范畴$C_1\times C_2$，其对象类

$$ob(C_1\times C_2)=ob(C_1)\times ob(C_2),$$

对于(A_1,A_2)，$(B_1,B_2)\in ob(C_1\times C_2)$，规定

$$Hom_{C_1\times C_2}((A_1,A_2),\ (B_1,B_2))$$
$$=Hom_{C_1}(A_1,B_1)\times Hom_{C_2}(A_2,B_2),$$

对于$(f_1,f_2)\in Hom_{C_1\times C_2}((A_1,A_2),\ (B_1,B_2))$，$(g_1,g_2)\in Hom_{C_1\times C_2}((B_1,B_2),\ (C_1,C_2))$，有

$$g_1f_1\in Hom_{C_1}(A_1,C_1),\quad g_2f_2\in Hom_{C_2}(A_2,C_2),$$

并且规定

$$(g_1,g_2)(f_1,f_2)=(g_1f_1,g_2f_2).$$

范畴$C_1\times C_2$称作范畴C_1与范畴C_2的积范畴。

(1.1.7)定义 设C是范畴，则存在一个范畴C^{op}，其对象类$ob(C^{op})=ob(C)$，态射集$Hom_{C^{op}}(A,\ B)=Hom_C(B,\ A)$，并且对于任意$f\in Hom_{C^{op}}(A,B)$和任意$g\in Hom_{C^{op}}(B,\ C)$，$f$与$g$在$C^{op}$中的合成等于$g$与$f$在$C$中的合成。范畴$C^{op}$称作范畴$C$的对偶范畴。

(1.1.8)注 对偶范畴的一个重要作用在于它提供了对偶原则。

设S是一个对任意范畴都有意义的陈述语，说明一个概念或提出一个命题等。对于任意范畴C，$S(C)$表示S关于C的陈述语，$S(C^{op})$是S关于C^{op}的陈述语。将$S(C^{op})$中C^{op}的对象与态射都换成C的对象与态射，就得到一个关于范畴C的陈述语$S^{op}(C)$，从而得到一个对任意范畴都有意义的陈述语S^{op}，称作S的对偶陈述语。

对偶原则是指，若对于任意范畴C，$S(C)$是真命题，则$S^{op}(C)$也是真命题。

(1.1.9) **定义** 设C是范畴，$A,B\in ob(C)$与$f\in Hom(A,B)$。若存在$g\in Hom(B,A)$使得

$$gf=id_A \text{ 和 } fg=id_B,$$

则称f为可逆态射，或同构态射，简称同构。此时称C中对象A与B是同构的，记作$A\cong B$。

若上述g存在，则易证它是唯一的。通常记作f^{-1}。

(1.1.10) **例** 范畴Set中同构态射是双射。范畴Sp中同构态射是拓扑空间的同胚映射。范畴Grp中同构态射是群同构。

(1.1.11) **命题** 设C是范畴，则C中对象的同构关系是自反的，对称的与传递的。

证明 直接验证。

(1.1.12) **定义** 设C是范畴，$f\in Hom_C(A,B)$。

(i) 若对于C中每个对象C与任意态射$g_1, g_2\in Hom_C(C,A)$（或$Hom_C(B,C)$），

$$fg_1=fg_2 \text{（或} g_1f=g_2f\text{）蕴涵 } g_1=g_2,$$

则称f是单（或满）态射；

(ii) 若存在态射$h\in Hom_C(B,A)$使得

$$hf=id_A \text{（或 } fh=id_B\text{）},$$

则称f为可裂单（或可裂满）态射。

(1.1.13) **例** 范畴Set中单（或满）态射是单（或满）映射。

(1.1.14) **命题** 设C是范畴，$f\in Hom_C(A,B)$与$g\in$

$Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$，则

(i)若 f 与 g 都是单(或满)态射，则 gf 是单(或满)态射；

(ii)若 gf 是单(或满)态射，则 f(或 g)是单(或满)态射；

(iii)可裂单(或可裂满)态射是单(或满)态射。

证明 由定义(1.1.12)直接验证。

(1.1.15)**注** 命题(1.1.14)中关于单态射和满态射的陈述语是互为对偶陈述语。因而根据对偶原则，只需证明单态射或满态射的情形。

(1.1.16)**定义** 设$\mathcal{C}$是范畴，$A\in ob(\mathcal{C})$。若对于$\mathcal{C}$中每个对象B，$Hom(A,B)$(或$Hom(B,A)$)是单元集，则称 A 为始(或终)对象。若A既是始对象又是终对象，则称A为零对象。

(1.1.17)**例** 在范畴**Set**中，空集ϕ是始对象但不是终对象，单元集是终对象但不是始对象。在范畴 **Grp** 中，平凡群是零对象。

(1.1.18)**命题** 设$\mathcal{C}$是范畴。若$\mathcal{C}$中对象A_1与A_2都是始(或终)对象，则$A_1\cong A_2$。

证明 若$\mathcal{C}$中A_1与A_2都是始对象，则 $Hom(A_1,A_2)$与$Hom(A_2,A_1)$都是单元集。设

$$f\in Hom(A_1,A_2),\quad g\in Hom(A_2,A_1),$$

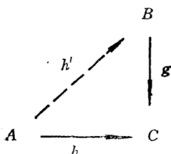
于是 $gf\in Hom(A_1,A_1)$。注意到 $id_{A_1}\in Hom(A_1,A_1)$与A_1是始对象，则有$gf=id_{A_1}$。同理，$fg=id_{A_2}$。综上所证，则知$A_1\cong A_2$。

对于A_1与 A_2都是$\mathcal{C}$中终对象的情形，则由对偶原则立即得到。

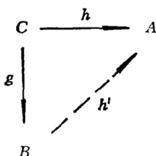
(1.1.19)**定义** 设$\mathcal{C}$是范畴，$A\in ob(\mathcal{C})$。若对于$\mathcal{C}$中任意态射$h\in Hom(A,C)$(或 $Hom(C,A)$)与 $g\in Hom(B,C)$(或 $Hom(C,B)$)，并且g是满(或单)态射，存在一个态射h'：$A\to B$(或$B\to A$)使得图(1.1.1)(或(1.1.2))可交换，即

$$h=gh'\text{(或}h=h'g\text{)},$$

此处B和C都是$\mathcal{C}$中任意对象，则称A为投射(或入射)对象。



图(1.1.1)



图(1.1.2)

(1.1.20)例　可以证明，在 $Abel$ 群与同态的范畴中，投射对象是自由 $Abel$ 群的直和项.

(1.1.21)定义　设 $\mathbf{C}$ 是范畴，$A\in ob(\mathbf{C})$，又设 $f: B\to A$ 与 $g: C\to A$ 都是 $\mathbf{C}$ 中单态射，若存在 $\mathbf{C}$ 中同构态射 $h: B\to C$ 使得 $f=gh$，则记 $f\equiv g$. 容易验证，关系 $\equiv$ 是 $\mathbf{C}$ 中以 A 为值域的全体单态射类上的等价关系，则由等价关系 $\equiv$ 确定的等价类称作 $\mathbf{C}$ 中对象 A 的子对象.

对偶地，设 $\mathbf{C}$ 是范畴，$A\in ob(\mathbf{C})$，又设 $f: A\to B$ 与 $g: A\to C$ 都是 $\mathbf{C}$ 中满态射. 若存在 $\mathbf{C}$ 中同构态射 $h: C\to B$ 使得 $f=hg$，则记 $f\equiv' g$. 容易验证，关系 $\equiv'$ 是 $\mathbf{C}$ 中以 A 为定义域的全体满态射类上的等价关系，则由等价关系 $\equiv'$ 确定的等价类称作 $\mathbf{C}$ 中对象 A 的商对象.

(1.1.22)例　在范畴 $\mathbf{Grp}$ 中，设 A' 是群 A 的子群，则包含映射 $i: A'\to A$ 是群的单同态. 因此，子群 A' 对应于群 A 的一个子对象，即 i 所在的关于关系 $\equiv$ 的等价类. 反之，设 $f: B\to A$ 与 $g: C\to A$ 都是群的单同态，并且 $f\equiv g$，则易见 $f(B)(=g(C))$ 是群 A 的子群，因此，群 A 的每个子对象对应于群 A 的一个子群. 容易验证：上述对应给出了群 A 的全体子群之族到群 A 的全体子对象之族之间的一一对应. 同理可证，群 A 的全体商群之族与群 A 的全体商对象之族之间是一一对应的.

§1.2 函　　子

(1.2.1) **定义**　设$\mathbf{C}$和$\mathbf{D}$都是范畴．一个从$\mathbf{C}$到$\mathbf{D}$的共变函子(或反变函子)F，记作

$$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D},$$

是指一对函数：一个是对象函数，即将$\mathbf{C}$中每个对象A对应于$\mathbf{D}$中一个对象$F(A)$，或简记FA．另一个是态射函数，即将$\mathbf{C}$中每个态射$f:A\to B$对应于$\mathbf{D}$中一个态射$F(f):F(A)\to F(B)$ (或$F(f):F(B)\to F(A)$)使得

(i)对于$\mathbf{C}$中任意对象A，有$F(id_A)=id_{F(A)}$;

(ii)对于$\mathbf{C}$中任意两个态射$f\in Hom(A,B)$, $g\in Hom(B,C)$，有

$F(gf)=F(g)F(f)$ (或$F(gf)=F(f)F(g)$)．

(1.2.2)**注**　一个反变函子F: $\mathbf{C}\to\mathbf{D}$可以看作共变函子$\mathbf{C}^{op}\to\mathbf{D}$．若无特别声明，本书涉及的函子都指共变函子．

(1.2.3)**例**

(i)设$\mathbf{C}'$是范畴$\mathbf{C}$的子范畴，则存在一个包含函子$\mathbf{C}'\to\mathbf{C}$，它将$\mathbf{C}'$中每个对象A映为$\mathbf{C}$中对象A，并且将$\mathbf{C}'$中每个态射f: $A\to B$映为$\mathbf{C}$中态射$f:A\to B$．特别地，若$\mathbf{C}'=\mathbf{C}$，则包含函子$\mathbf{C}'\to\mathbf{C}$称作$\mathbf{C}$上恒同函子，记作

$$id_{\mathbf{C}}:\mathbf{C}\to\mathbf{C}.$$

(ii)设$\mathbf{C}$和$\mathbf{D}$都是范畴，$B\in ob(\mathbf{D})$，则存在一个常值函子

$$\Delta(B):\mathbf{C}\to\mathbf{D}.$$

它将$\mathbf{C}$中每个对象A都映为$\mathbf{D}$中对象B，并且将$\mathbf{C}$中每个态射$f:A\to A'$都映为$\mathbf{D}$中态射$id_B:B\to B$．

(iii)设$\mathbf{C}$是范畴，$A\in ob(\mathbf{C})$，则存在一个共变函子

$$Hom(A,\ -):\mathbf{C}\to\mathbf{Set},$$

它将$\mathbf{C}$中每个对象B映为集$Hom_{\mathbf{C}}(A,\ B)\in ob(\mathbf{Set})$，并且将$\mathbf{C}$

中每个态射$g:B\to B'$映为

$Hom(A,g)=g_*:Hom_C(A,B)\to Hom_C(A,B')$，此处，对于$h\in Hom_C(A,\ B)$，有

$$g_*(h)=gh\in Hom_C(A,\ B').$$

(iv)设$\mathbf{C}$是范畴，$B\in ob(\mathbf{C})$，则存在一个反变函子

$$Hom(-,\ B):\mathbf{C}\to \boldsymbol{Set},$$

它将$\mathbf{C}$中每个对象A映为集$Hom_C(A,\ B)\in ob(\boldsymbol{Set})$，并且将$\mathbf{C}$中每个态射$f:A'\to A$映为

$Hom(f,B)=f^*:Hom_C(A,\ B)\to Hom_C(A',B)$，此处，对于$h\in Hom_C(A,\ B)$，有

$$f^*(h)=hf\in Hom_C(A',\ B).$$

函子$Hom(A,-)$和函子$Hom(-,\ B)$统称为态射函子.

(1.2.4)命题　设$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是函子．若$f:A\to B$是$\mathbf{C}$中同构态射，则$F(f):F(A)\to F(B)$是$\mathbf{D}$中同构态射.

证明　因为$f:A\to B$是$\mathbf{C}$中同构态射，于是存在$\mathbf{C}$中态射$g:B\to A$使得

$$gf=id_A\ 与\ fg=id_B.$$

但是$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是函子，故

$$F(g)F(f)=id_{F(A)}\ 与\ F(f)F(g)=id_{F(B)}.$$

所以，$F(f):F(A)\to F(B)$是$\mathbf{D}$中同构态射.

(1.2.5)**定义**　设$F:\mathbf{C}\to\mathbf{C}'$与$G:\mathbf{C}'\to\mathbf{C}''$都是函子，则存在一个函子

$$GF:\mathbf{C}\to\mathbf{C}'',$$

它将$\mathbf{C}$中每个对象A映为$\mathbf{C}''$中对象$G(F(A))$，并且将$\mathbf{C}$中每个态射$f:A\to B$映为$\mathbf{C}''$中态射$G(F(f)):G(F(A))\to G(F(B))$．函子$GF$称作函子$F$与$G$的合成函子或复合函子.

(1.2.6)**定义**　设$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是函子，若存在函子$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$，使得

$$GF=id_C\ 与\ FG=id_D,$$

则称函子F为范畴同构，此时，称范畴$\mathbf{C}$与范畴$\mathbf{D}$是同构的.

(1.2.7) **定义** 设$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是函子.

(i)若对于$\mathbf{C}$中任意态射集$Hom_C(A, B)$，F都是从$Hom_C(A,B)$到$Hom_D(FA, FB)$的单射，则称F为忠实函子；

(ii)若对于$\mathbf{C}$中任意态射集$Hom_C(A, B)$，F都是从$Hom_C(A,B)$到$Hom_D(FA,FB)$的满射，则称F为完全函子.

(1.2.8) **例** 常值函子是完全函子. 包含函子是忠实函子.

(1.2.9) **定义** 设C是范畴. 若函子

$$G:\mathbf{C}\to \boldsymbol{Set}$$

是忠实函子,则称偶(C, G)为具体范畴,并且称函子G为遗忘函子.

例如，范畴$\boldsymbol{Sp}$与范畴$\boldsymbol{Grp}$都是具体范畴.

§1.3 自然变换

(1.3.1) **定义** 设$F, G:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$都是共变(或反变)函子. 从$F$到$G$的自然变换

$$\lambda: F\to G$$

是指一个函数,它将$\mathbf{C}$中每个对象A对应于$\mathbf{D}$中一个态射$\lambda_A: F(A)\to G(A)$，使得对于$\mathbf{C}$中每个态射$f: A\to B$，$\mathbf{D}$中态射图(1.3.1)(或(1.3.2))是可交换:

若对于$\mathbf{C}$中每个对象A,$\mathbf{D}$中态射$\lambda_A: F(A)\to G(A)$都是同构态射，则称自然变换$\lambda: F\to G$为自然同构，或自然等价，也称函子F与函子G是自然同构的，记作$F\cong G$.

(1.3.2) **例**

(i)设$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是函子，则对于$\mathbf{C}$中每个对象$A$，由$A\mapsto id_{F(A)}$给出从$F$到$F$的一个自然变换

$$id_F: F\to F,$$

称为函子F上恒同自然变换.

(ii)设F, G, $H:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$都是函子，$\lambda: F\to G$与$\mu: G\to H$都是自然变换，则对于$\mathbf{C}$中任意态射$f: A\to B$，图(1.3.3)中两个小矩

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\lambda_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow[\lambda_B]{} & G(B) \end{array}$$

图(1.3.1)

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\lambda_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow[\lambda_B]{} & G(B) \end{array}$$

图(1.3.2)

形都可交换，由此易见该图中大矩形也可交换．所以，对于C中任意对象A，由$A\mapsto\mu_A\lambda_A$给出一个自然变换

$$\mu\lambda: F\to H,$$

称作λ与μ的合成．

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{\lambda_A} & G(A) & \xrightarrow{\mu_A} & H(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & {\scriptstyle G(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H(f)} \\ F(B) & \xrightarrow[\lambda_B]{} & G(B) & \xrightarrow[\mu_B]{} & H(B) \end{array}$$

图(1.3.3)

(iii)设F，$G: \mathbf{C}\to\mathbf{D}$都是函子，$\lambda: F\to G$是自然变换．若$H: \mathbf{C}_1\to\mathbf{C}$是函子，则对于$\mathbf{C}_1$中任意对象$A_1$，由$A_1\mapsto\lambda_{H(A_1)}$给出一个自然变换

$$\lambda_H: FH\to GH.$$

(iv) 设$F,G:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$都是函子，$\lambda:F\to G$是自然变换。若$H:\mathbf{D}\to\mathbf{D}_1$是函子，则对于$\mathbf{C}$中任意对象$A$，由$A\mapsto H(\lambda_A)$给出一个自然变换

$$H(\lambda):HF\to HG.$$

(v) 设$\mathbf{C}$是范畴，$f:A'\to A$与$g:B\to B'$都是$\mathbf{C}$中态射，则易证图(1.3.4)可交换。于是对于$\mathbf{C}$中任意对象B，由$B\mapsto Hom(f,B)$给出一个自然变换

$$f^*:Hom(A,\ -)\to Hom(A'-),$$

称作由f诱导的自然变换。同样地，对于$\mathbf{C}$中任意对象A，由$A\mapsto Hom(A,\ g)$给出一个自然变换

$$g_*:Hom(-,\ B)\to Hom(-,\ B'),$$

称作由g诱导的自然变换。

$$\begin{array}{ccc}
Hom(A,B) & \xrightarrow{Hom(f,B)} & Hom(A',B) \\
{\scriptstyle Hom(A,g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Hom(A',g)} \\
Hom(A,B') & \xrightarrow[Hom(f,B')]{} & Hom(A',B')
\end{array}$$

图(1.3.4)

(1.3.3) **命题** 设F，$G:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$都是函子，$\lambda:F\to G$是自然变换，则

$$\lambda id_F=\lambda=id_G\lambda.$$

证明 直接验证.

(1.3.4) **定理** 设F, $G: \mathbf{C}\to\mathbf{D}$都是函子, $\lambda: F\to G$是自然变换, 则自然变换$\lambda: F\to G$是自然同构当且仅当存在自然变换$\mu: G\to F$, 使得

$$\mu\lambda = id_F \text{ 与 } \lambda\mu = id_G.$$

证明 若$\lambda: F\to G$是自然同构, 则对于$\mathbf{C}$中任意对象A, $\lambda_A: F(A)\to G(A)$是同构态射, 故$\lambda_A^{-1}: G(A)\to F(A)$也是同构态射. 容易验证, 对于$\mathbf{C}$中任意对象$A$, 由$A\mapsto\lambda_A^{-1}$给出一个自然变换

$$\mu: G\to F$$

满足$\mu\lambda = id_F$与$\lambda\mu = id_G$.

反之, 设$\lambda: F\to G$, $\mu: G\to F$都是自然变换, 并且$\mu\lambda = id_F$与$\lambda\mu = id_G$, 则对于$\mathbf{C}$中任意对象A, 有

$$\mu_A\lambda_A = id_{F(A)} \text{ 与 } \lambda_A\mu_A = id_{G(A)}.$$

由此可知$\lambda_A: F(A)\to G(A)$是同构态射. 所以,

$$\lambda: F\to G$$

是自然同构.

(1.3.5) **例** 设$\mathbf{C}$是范畴, $\mathbf{J}$是小范畴, 则存在一个范畴$\mathbf{C}^{\mathbf{J}}$, 其对象类$ob(\mathbf{C}^{\mathbf{J}})$是由从$\mathbf{J}$到$\mathbf{C}$的全体函子构成的, 对于$F, G\in ob(\mathbf{C}^{\mathbf{J}})$, 态射集$Hom_{\mathbf{C}^{\mathbf{J}}}(F,G)$是$F$到$G$的全体自然变换之集, 并且$\mathbf{C}^{\mathbf{J}}$中态射的合成是(从$\mathbf{J}$到$\mathbf{C}$的函子之间的)自然变换的合成.

给定范畴$\mathbf{C}$与小范畴$\mathbf{J}$, 则存在一个函子

$$\Delta: \mathbf{C}\to\mathbf{C}^{\mathbf{J}}.$$

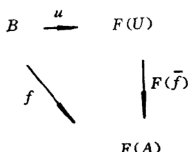
它将$\mathbf{C}$中每个对象A映为(从$\mathbf{J}$到$\mathbf{C}$的)常值函子$\triangle(A)$, 并且将$\mathbf{C}$中每个态射$f: A\to B$映为自然变换$\Delta(f): \Delta(A)\to\Delta(B)$. 此处, 对于任意$j\in ob(\mathbf{J})$, $\Delta(f)_j = f$, 易证$\Delta(f)$是$\mathbf{C}^{\mathbf{J}}$中态射. 函子$\Delta: \mathbf{C}\to\mathbf{C}^{\mathbf{J}}$称作对角函子.

§1.4 泛态射与极限

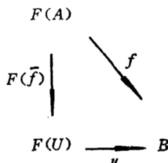
(1.4.1) **定义** 设$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是函子，$B\in ob(\mathbf{D})$。又设$U\in ob(\mathbf{C})$，$u:B\to F(U)$（或$F(U)\to B$）是$\mathbf{D}$中态射。若$\forall A\in ob(\mathbf{C})$，$\forall f\in Hom_D(B, F(A))$（或$Hom_D(F(A), B)$），存在$\mathbf{C}$中唯一态射$\bar{f}:U\to A$（或$A\to U$）使得图(1.4.1)（或(1.4.2)）可交换，即

$$f=F(\bar{f})u\ (\text{或} f=uF(\bar{f})),$$

则称$u:B\to F(U)$（或$F(U)\to B$）是从B到F（或从F到B）的泛态射.



图(1.4.1)



图(1.4.2)

(1.4.2) **例** 设$F:\mathbf{Grp}\to\mathbf{Set}$是遗忘函子，$B$是集。若$U$是$B$上自由群，则包含映射

$$u:B\to F(U)$$

是从B到F的泛态射。

(1.4.3) **定理** 设$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是函子，$B\in ob(\mathbf{D})$。若$u:B\to F(U)$与$u':B\to F(U')$都是从$B$到$F$的泛态射，则在$\mathbf{C}$中存在唯一同构态射

$$h:U\to U'$$

使得$u'=F(h)u$。

证明 因为u与u'都是从B到F的泛态射，则由泛态射定义可

知存在$\mathbf{C}$中唯一态射

$$h: U \to U'$$

使得$u' = F(h)u$与存在$\mathbf{C}$中唯一态射

$$h': U' \to U$$

使得$u = F(h')u'$。由此可知$h'h: U \to U$满足

$$F(h'h)u = F(h')F(h)u = F(h')u' = u.$$

但是，$u: B \to F(U)$是从B到F的泛态射，并且$u = F(id_U)u$。所以，$h'h = id_U$。同理可证$hh' = id_{U'}$。上述表明使得$u' = F(h)u$的$\mathbf{C}$中唯一态射$h: U \to U'$是同构态射。

(1.4.4) **定理** 设$F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$是函子，$B \in ob(\mathbf{D})$。若$v: F(V) \to B$与$v': F(V') \to B$都是从$F$到$B$的泛态射，则在$\mathbf{C}$中存在唯一同构态射

$$h: V' \to V$$

使得$v' = vF(h)$。

证明 由定理(1.4.3)对偶地证明。

(1.4.5) **定义** 设$\mathbf{C}$是范畴，J是小范畴，与$\Delta: \mathbf{C} \to \mathbf{C}^J$是对角函子。对于$F \in ob(\mathbf{C}^J)$，则$\mathbf{C}$中对象$U$和从$F$到$\Delta$的泛态射$u: F \to \Delta(U)$的偶$(U, u)$称作$F$的余极限或顺向极限或归纳极限，并且称$U$为$F$的余极限对象，记作

$$U = \underrightarrow{\lim} F.$$

对偶地，对于$F \in ob(\mathbf{C}^J)$，则$\mathbf{C}$中对象V和从Δ到F的泛态射$v: \Delta(V) \to F$的偶(V, v)称作F的极限或逆向极限或射影极限并且称V为F的极限对象，记作

$$V = \underleftarrow{\lim} F.$$

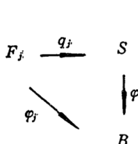
若$\forall F \in ob(\mathbf{C}^J)$，$F$有余极限（或极限），则称$\mathbf{C}$有$J$型余极限（或极限）。

(1.4.6) **例** 设J是空范畴$\mathbf{O}$，$\mathbf{C}$是任意范畴，则范畴$\mathbf{C}^J$中仅含一个对象和一个恒同态射。对于$F \in ob(\mathbf{C}^J)$，则易见$\underrightarrow{\lim} F$

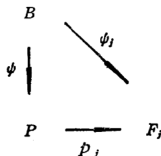
与 $\underleftarrow{\lim}\, F$分别是$C$中的始对象与终对象.

(1.4.7) **定义** 设J是离散(小)范畴,C是任意范畴. 可以将范畴J与集$ob(J)$等同看待,并且C^J中对象F可视为以J为指标集的C中对象族$\{F_j \mid j\in J\}$,其中$F_j=F(j)\in ob(C)$,则F的余极限$(\underrightarrow{\lim}F,\ u)$与极限$(\underleftarrow{\lim}F,\ v)$分别称作$C$中对象族$\{F_j \mid j\in J\}$的余积与乘积.

内蕴地,易见范畴C中对象族$\{F_j \mid j\in J\}$的余积(或称作和)是C中一个对象S和一个态射族$\{q_j: F_j\to S \mid j\in J\}$,使得对于$C$中每个对象$B$与每个态射族$\{\varphi_j: F_j\to B \mid j\in J\}$,都存在$C$中唯一态射$\varphi: S\to B$使得$\forall j\in J$,图(1.4.3)可交换,即$\varphi_j=\varphi q_j$. 通常将$S$记作$\coprod\{F_j \mid j\in J\}$,称作$\{F_j \mid j\in J\}$的余积对象. 若范畴$C$中任意一族对象的余积都存在,则称范畴$C$有余积.



图(1.4.3)



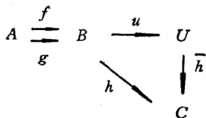
图(1.4.4)

对偶地,易见范畴C中对象族$\{F_j \mid j\in J\}$的乘积是C中一个对象P和一个态射族$\{p_j: P\to F_j \mid j\in J\}$,使得对于$C$中每个对象$B$与每个态射族$\{\psi_j: B\to F_j \mid j\in J\}$,都存在$C$中唯一态射$\psi: B\to P$使得$\forall j\in J$,图(1.4.4)可交换,即$\psi_j=p_j\psi$. 通常将$P$记作$\prod\{F_j \mid j\in J\}$,称作$\{F_j \mid j\in J\}$的乘积对象. 若范畴$C$中任意一族对象的乘积都存在,则称范畴$C$有乘积.

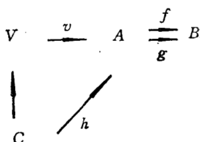
在范畴$\boldsymbol{Set}$中,对象族的余积对象是集族的不交并,对象族

的乘积对象是集族的笛卡尔积。在范畴**Sp**中，对象族的余积对象是拓扑空间族的和，对象族的乘积对象是拓扑空间族的Tychonoff 乘积。在范畴 **Grp**中，对象族的余积对象是群的直和，对象族的乘积对象是群的直积。

(1.4.8) 定义　设C是范畴，$J=i\rightrightarrows j$，即范畴J由两个对象i和j，两个以i为定义域，j为值域的非恒同态射，以及i，j上恒同态射构成，则C^J中对象F可看作C中一对态射$A\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}B$，称作$C$中平行偶。容易验证：$F$有余极限当且仅当存在$C$中对象$U$和$C$中态射$u: B\to U$使得$uf=ug$，并且$\forall C\in ob(C)$与$\forall h\in Hom_C(B, C)$，当$hf=hg$时，存在$C$中唯一态射$\bar{h}:U\to C$使得图(1.4.5)可交换，即$h=\bar{h}u$。这样的$u:B\to U$称作平行偶$A\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}B$(或$f$和$g$)的余等化子，有时简称$U$是$f$和$g$的余等化子。



图(1.4.5)



图(1.4.6)

对偶地，F有极限当且仅当存在C中对象V和C中态射$v:V\to A$使得$fv=gv$，并且$\forall C\in ob(C)$与$\forall h\in Hom_C(C, A)$，当$fh=gh$时，存在C中唯一态射$\bar{h}:C\to V$使得图(1.4.6)可交换，即$h=v\bar{h}$.这样的$v:V\to A$称作平行偶$A\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}B$(或$f$和$g$)的等化子，有时也简称$V$是$f$和$g$的等化子。

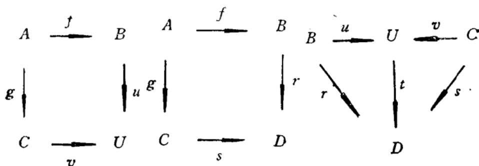
若范畴C中任意平行偶都有余等化子(或等化子)，则称范畴C有余等化子子(或等化子)。

在范畴**Set**中，平行偶$A\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}B$的余等化子是投射$p:B\to B/E$，此处$E$是$\{(f(a),\ g(a))\,|\,a\in A\}\subseteq B\times B$的等价闭包。平行偶$A\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}B$的等化子是包含映射$v:V\to A$，此处$V=\{a\in A\,|\,f(a)=g(a)\}$。

(1.4.9) **定义** 设C是范畴，$J=j\leftarrow i\rightarrow k$，即范畴$J$由三个对象$i$,$j$和$k$,两个非恒同态射$i\to j$与$i\to k$,以及$i$，$j$和$k$上恒同态射构成，则$C^J$中对象$F$可看作$C$中有公共定义域的一对态射$B\overset{f}{\leftarrow}A\overset{g}{\to}C$。容易验证：$F$有余极限当且仅当存在$C$中一个对象$U$和$C$中一个态射交换图(1.4.7)使得对于$C$中任意对象$D$和$C$中任意一对态射$r:B\to D$与$s:C\to D$的交换图(1.4.8)，存在$C$中唯一态射

$$t:U\to D$$

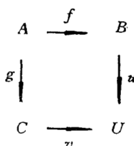
使得图(1.4.9)可交换.这样的图(1.4.7)称作f和g的推出图,并且称u是g沿着f的推出.若范畴C中任意一对有相同定义域的态



图(1.4.7) 图(1.4.8) 图(1.4.9)

射都有推出图，则称范畴$\mathbf{C}$有推出．

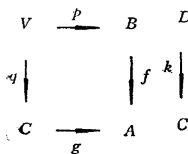
在范畴Set 中，设$B\xleftarrow{f}A\xrightarrow{g}C$是一对有相同定义域的态射．命$U$是将$B\coprod C$的$f(a)$与$g(a)$（对于每个$a\in A$）粘合而成的商集，则图(1.4.10)是$f$和$g$的推出图，其中$u:B\to U$与$v:C\to U$都是包含映射．



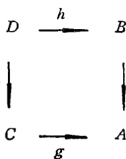
图(1.4.10)

(1.4.10) **定义** 设$\mathbf{C}$是范畴，$J=j\to i\leftarrow k$，即范畴J由三个对象i，j和k，两个非恒同态射$j\to i$和$k\to i$，以及i，j和k上恒同态射构成，则$\mathbf{C}^J$中对象F可看作$\mathbf{C}$中有公共值域的一对态射$B\xrightarrow{f}A\xleftarrow{g}C$．容易验证：$F$有极限当且仅当存在$\mathbf{C}$中一个对象$V$和$\mathbf{C}$中一个态射交换图(1.4.11)使得对于$\mathbf{C}$中任意对象$D$和$\mathbf{C}$中任意一对态射$h:D\to B$与$k:D\to C$的交换图(1.4.12)，存在$\mathbf{C}$中唯一态射

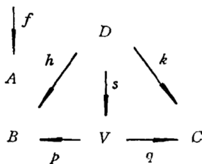
$$s:D\to V$$



图(1.4.11)



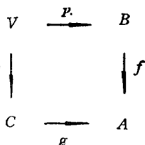
图(1.4.12)



图(1.4.13)

使得图(1.4.13)可交换．这样的图(1.4.11)称作f和g的拉回图，并且称p是g沿着f的拉回．若范畴$\mathbf{C}$中任意一对有相同值域的态射都有拉回图，则称范畴$\mathbf{C}$有拉回．

在范畴Set中，设$B\xrightarrow{f}A\xleftarrow{g}C$是一对有相同值域的态射。命$V=\{(b,c)\in B\times C\mid f(b)=g(c)\}$，则图(1.4.14)是$f$和$g$的拉回图，其中$p$: $V\to B$与$q:V\to C$都是标准投射(在V上的限制)。



图(1.4.14)

(1.4.11) **定理** 设$\mathbf{C}$是范畴，$\mathbf{J}$是小范畴。若$F\in ob(\mathbf{C}^{\mathbf{J}})$存在余极限(或极限)，则$F$的余极限(或极限)对象在同构意义下是唯一的。

证明 由余极限(或极限)定义，定理(1.3.3)和定理(1.3.4)即证。

(1.4.12) **定义** 设$\mathbf{C}$是范畴，$f:A\to B$是$\mathbf{C}$中态射。

(i) 若f是$\mathbf{C}$中某个平行偶的等化子，则称f是正则单态射；

(ii) 若f是$\mathbf{C}$中某个平行偶的余等化子，则称f是正则满态射。

(1.4.13) **定理** 设$\mathbf{C}$是范畴，$f:A\to B$是$\mathbf{C}$中态射。

(i) 若f是正则单态射，则f是单态射；

(ii) 若f是正则满态射，则f是满态射；

(iii) 若f是可裂单态射，则f是正则单态射；

(iv) 若f是可裂满态射，则f是正则满态射。

证明 (i)设范畴$\mathbf{C}$中态射$f:A\to B$是正则单态射，则可设f: $A\to B$是平行偶$B\underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}}B_1$的等化子.为证$f:A\to B$是单态射，设$\mathbf{C}$中态射$h_1$，$h_2:A_1\to A$使得$fh_1=fh_2:A_1\to B$，记$h=fh_1=fh_2:A_1\to B$，则$g_1h=g_2h$.但是，$f:A\to B$是平行偶$B\underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}}B_1$的等化子，故存在$\mathbf{C}$中唯一态射

$$\bar{h}: A_1 \to A$$

使得图(1.4.15)可交换．由$\bar{h}$的唯一性，则易见 $h_1 = h_2 = \bar{h}$．所以，$f: A \to B$是单态射．

(ii)由(i)对偶地证明．

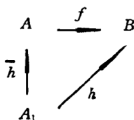
(iii)若范畴$\mathbf{C}$中态射$f: A \to B$是可裂单态射，则存在$\mathbf{C}$中态射 $g: B \to A$ 使得 $gf = id_A$．命 $g_1 = id_B: B \to B$ 与 $g_2 = fg: B \to B$，于是

$$g_1 f = f = fgf = g_2 f.$$

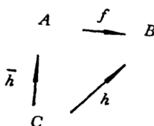
若$\mathbf{C}$中态射$h: C \to B$使得$g_1 h = g_2 h$，命$\bar{h} = gh$，则

$$f\bar{h} = fgh = g_2 h = g_1 h = id_B h = h,$$

即图(1.4.16)可交换．又若$\mathbf{C}$中态射$\bar{h}_1: C \to A$ 使得 $f\bar{h}_1 = h$，于是 $gf\bar{h}_1 = gh$，即$\bar{h}_1 = gh = \bar{h}$，这表明$\bar{h}$是唯一的．综上所证，则知f是g_1和g_2的等化子．所以，f是正则单态射．



图(1.4.15)



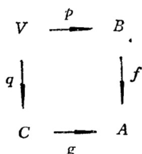
图(1.4.16)

(iv) 由(iii)对偶地证明．

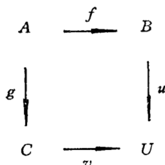
(1.4.14) **定理** 设$\mathbf{C}$是范畴．

(i)若$\mathbf{C}$中态射图(1.4.17)是f和g的拉回图，并且g是单态射，则p也是单态射；

(ii)若$\mathbf{C}$中态射图(1.4.18)是f和g的推出图，并且g是满态射，则u也是满态射．



图(1.4.17)



图(1.4.18)

证明 (i) 设C中态射

$$h_1,\ h_2: V_1 \to V$$

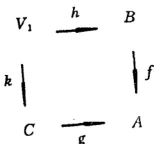
使得$ph_1 = ph_2$，则从$fph_1 = fph_2$与 f 和 g 的拉回图可知$gqh_1 = gqh_2$。但是g是单态射，故$qh_1 = qh_2$。命

$$h = ph_1 = ph_2: V_1 \to B$$

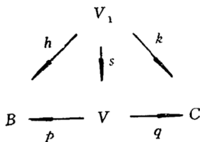
与

$$k = qh_1 = qh_2: V_1 \to C,$$

则易证图(1.4.19)可交换. 从而存在C中唯一态射$s: V_1 \to V$ 使得图(1.4.20)可交换. 由此易见$h_1 = h_2 (= s)$. 所以，p是单态射.



图(1.4.19)



图(1.4.20)

(ii) 由 (i) 对偶地证明.

(1.4.15) **定理** 若范畴C有乘积和等化子，则对于 任意小

范畴J，范畴C有J型极限.

证明 在以下证明中，i表示指标范畴J中一个对象，$u: j\to k$表示指标范畴J中一个态射，$dom\ u$表示态射$u: j\to k$的定义域与$cod\ u$表示态射$u: j\to k$的值域. 根据题设，对于$F\in ob(C^J)$，则在范畴C中乘积$\prod_i F_i$和乘积$\prod_u F_{cod\,u}$都是存在的，此处$F_i=F(i)$，乘积$\prod_i F_i$中i取遍J中全体对象之集，并且乘积$\prod_u F_{cod\,u}$中u取遍J中全体态射之集. 于是存在C中唯一态射

$$f: \prod_i F_i\to \prod_u F_{cod\,u}$$

与C中唯一态射

$$g: \prod_i F_i\to \prod_u F_{cod\,u},$$

使得对于J中每个态射$u: j\to k$，图(1.4.21)中的上方矩形和下方矩形都可交换. 根据题设，则范畴C有等化子，故可设C中态射

$$e: V\to \prod_i F_i$$

是f和g的等化子. 对于$i\in ob(J)$，令

$$v_i=p_i e: V\to F_i,$$

则由$fe=ge$与图(1.4.21)中两个交换矩形可知，对于J中每个态射$u: j\to k$，有

$$F_u v_j=F_u p_j e=p_u g e=p_u f e=p_k e=v_k.$$

于是，$v_i: V\to F_i$确定范畴C^J中一个态射

$$v: \Delta(V)\to F,$$

以下证明(V, v)是F的极限. 事实上，对于C中对象A和C^J中态射$\tau: \Delta(A)\to F$，则易见对于J中态射$u: j\to k$有$F_u\tau_j=\tau_k$. 因为$\prod_i F_i$是C中乘积，从而C中态射族

$$\{\tau_i: A\to F_i \mid i\in ob(J)\}$$

确定C中唯一态射

$$h: A\to \prod_i F_i$$

使得$\forall i\in ob(J)$，$\tau_i=p_i h$. 于是对于C中态射$u: j\to k$，有

$$p_u f h=p_k h=\tau_k\text{与}p_u g h=F_u p_j h=F_u\tau_j=\tau_k.$$

但是$\prod_u F_{cod\,u}$是乘积，故$fh=gh$. 这样，因为e是f和g的等化

子，所以存在C中唯一态射$\bar{h}: A \to V$使得 $h = e\bar{h}$。又因为$\prod_i F_i$是乘积，则易见$h = e\bar{h}$当且仅当对于J中每个对象i有$\tau_i = v_i\bar{h}$，即C^J中态射图(1.4.22)可交换。这表明(V, v)是F的极限。即证明了范畴C有J型极限。

图(1.4.21)

图(1.4.22)

(1.4.16) **定理** 若范畴C存在有限乘积和等化子，则对于任意有限范畴J(即范畴J中仅含有限个对象和态射)，范畴C有J型极限。

证明 完全重复定理(1.4.15)的证明过程即得。

(1.4.17) **定理** 若范畴$\mathbf{C}$有余积与余等化子，则对于任意小范畴J，范畴$\mathbf{C}$有J型余极限。

证明 由定理(1.4.15)对偶地证明。

(1.4.18) **定理** 若范畴$\mathbf{C}$存在有限余积和余等化子，则对于任意有限范畴J，范畴$\mathbf{C}$有J型余极限。

证明 由定理(1.4.16)对偶地证明。

§1.5 伴随函子

(1.5.1)**定义** 设$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$与$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$都是函子。若$\forall A\in ob(\mathbf{C})$，$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，存在一个双射

$$\varphi=\varphi_{A,B}:Hom_D(FA,\ B)\to Hom_C(A,\ GB)$$

使得φ关于A和B都是自然的（见注(1.5.2)），则称有序三元组$(F,\ G,\ \varphi)$为从$\mathbf{C}$到$\mathbf{D}$的伴随，或简称序偶$(F,\ G)$为伴随对，并且称F是G的左伴随，G是F的右伴随，记作$F\dashv G$。

(1.5.2)**注** $\varphi_{A,B}$关于A和B都是自然的是指：$\forall A\in ob(\mathbf{C})$，$\varphi_{A,-}$是共变函子$Hom_D(FA,-)$到共变函子$Hom_C(A,G(-))$的

$$\begin{array}{ccc}
Hom_D(FA',B) & \xrightarrow{\varphi} & Hom_C(A',GB)\\
F(f)^{*}\uparrow & & \uparrow f^{*}\\
Hom_D(FA,B) & \xrightarrow{\varphi} & Hom_C(A,GB)\\
g_{*}\downarrow & & \downarrow G(g)_{*}\\
Hom_D(FA,B') & \xrightarrow{\varphi} & Hom_C(A,GB')
\end{array}$$

图(1.5.1)

自然变换，并且$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，$\varphi_{-,B}$是反变函子$Hom_D(F(-),B)$到反变函子$Hom_C(-,GB)$的自然变换。即对于范畴$\mathbf{C}$中每个态射$f:A'\to A$和范畴$\mathbf{D}$中每个态射$g:B\to B'$，图(1.5.1)可交换。

(1.5.3) **定理** 设$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$和$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$都是函子。若$(F,G,\varphi)$是从$\mathbf{C}$到$\mathbf{D}$的伴随，则

(i) 存在一个自然变换

$$\eta:id_C\to GF$$

使得$\forall A\in ob(\mathbf{C})$，$\mathbf{C}$中态射$\eta_A:A\to G(FA)$是从$A$到$G$的泛态射，并且对于$\mathbf{D}$中每个态射$g:FA\to B$，有$\varphi(g)=G(g)\eta_A$；

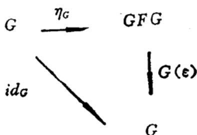
(ii) 存在一个自然变换

$$\varepsilon:FG\to id_D$$

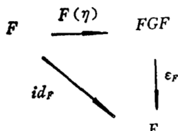
使得$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，$\mathbf{D}$中态射$\varepsilon_B:F(GB)\to B$是从$F$到$B$的泛态射，并且对于$\mathbf{C}$中每个态射$f:A\to GB$，有$\varphi^{-1}(f)=\varepsilon_B F(f)$。

进而，自然变换η和自然变换ε使图(1.5.2)和图(1.5.3)都可交换。

自然变换η和自然变换ε分别称作伴随(F,G,φ)的单位和余单位。



图(1.5.2)



图(1.5.3)

证明 (i) 因为(F,G,φ)是从$\mathbf{C}$到$\mathbf{D}$的伴随，故$\forall A\in ob(\mathbf{C})$，有

$$\varphi=\varphi_{A,FA}: Hom_D(FA, FA)\to Hom_C(A, G(FA))$$

是双射. 记

$$\eta_A=\varphi(id_{FA}): A\to G(FA),$$

则由 $A\mapsto\eta_A$ 给出从函子 id_C 到函子 GF 的一个自然变换 $\eta: id_C\to GF$. 事实上, 对于**C**中任意态射 $h: A'\to A$, 在图(1.5.1)中将B换成FA或FA'则得

$$\begin{aligned}GF(h)\varphi(id_{FA'})&=\varphi(F(h)id_{FA'})=\varphi(id_{FA}F(h))\\&=\varphi(id_{FA})h,\end{aligned}$$

即图(1.5.4)可交换. 这表明

$$\eta: id_C\to GF$$

是自然变换.

$$\begin{array}{ccc}A' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & GFA' \\ h\downarrow & & \downarrow GF(h) \\ A & \xrightarrow{\eta_A} & GFA\end{array}$$

图(1.5.4)

其次, 证明 $\forall A\in ob(\mathbf{C})$,

$$\eta_A: A\to G(FA)$$

是从A到G的泛态射. 事实上, $\forall B\in ob(\mathbf{D})$和**C**中每个态射$f: A\to GB$存在**D**中态射

$$\bar{f}=\varphi^{-1}(f): FA\to B.$$

由交换图(1.5.5), 则易见 $f=G(\bar{f})\eta_A$, 并且满足这关系式的态射$\bar{f}$是唯一的. 这表明

$$\eta_A: A\to G(FA)$$

是从A到G的泛态射.

$$\begin{array}{ccc} Hom_D(FA,FA) & \xrightarrow{\varphi} & Hom_C(A,GFA) \\ \bar{f}_* \downarrow & & \downarrow G(\bar{f})_* \\ Hom_D(FA,B) & \xrightarrow{\varphi} & Hom_C(A,GB) \end{array}$$

图(1.5.5)

最后，对于**D**中任意态射$g:FA\to B$，由交换图(1.5.6) 易见$\varphi(g)=\varphi(gid_{FA})=\mathbf{G}(g)\varphi(id_{FA})=\mathbf{G}(g)\eta_A$。

$$\begin{array}{ccc} Hom_D(FA,FA) & \xrightarrow{\varphi} & Hom_C(A,GFA) \\ g\cdot \downarrow & & \downarrow G(g)\cdot \\ Hom_D(FA,B) & \xrightarrow{\varphi} & Hom_C(A,GB) \end{array}$$

图(1.5.6)

(ii) 由(i)对偶地证明。

根据(i)和(ii)，则$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，$\forall A\in ob(\mathbf{C})$有

$id_{GB}=\varphi(\bar{\varepsilon}_B)=G(\bar{\varepsilon}_B)\eta_{GB}$，$id_{FA}=\varphi^{-1}(\eta_A)=\varepsilon_{FA}F(\eta_A)$。这表明关于自然变换$\eta$和自然变换$\varepsilon$的图(1.5.2)和图 (1.5.3) 都可交换。

(1.5.4)**定理**　设$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$和$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$都是函子。

(i) 若$\eta:id_C\to GF$是自然变换，并且$\forall A\in ob(\mathbf{C})$，$\eta_A:A\to G(FA)$是从$A$到$G$的泛态射，则$(F, G,\varphi)$是从$\mathbf{C}$到$\mathbf{D}$的伴随，

此处，对于D中任意态射$g: FA \to B$，有

$$\varphi(g) = G(g)\eta_A: A \to GB;$$

(ii) 若$\varepsilon: FG \to id_D$是自然变换，并且$\forall B \in ob(D)$，$\varepsilon_B: F(GB) \to B$是从$F$到$B$的泛态射，则$(F, G, \varphi)$是从$C$到$D$的伴随，此处，对于$C$中任意态射$f: A \to GB$，有

$$\varphi^{-1}(f) = \varepsilon_B F(f): FA \to B.$$

证明 (i) 因为$\forall A \in ob(C)$，$\eta_A: A \to G(FA)$是从A到G的泛态射，故对于D中任意对象B和C中任意态射$f: A \to GB$，存在D中唯一态射$g: FA \to B$使得$f = G(g)\eta_A$. 这表明

$$\varphi = \varphi_{A;\,B}: Hom_D(FA,\ B) \to Hom_C(A,\ GB)$$
$$g \mapsto G(g)\eta_A$$

是双射.

为证双射$\varphi_{A,\,B}$关于A是自然的，设$h: A' \to A$是C中任意态射. 由于$\eta: id_C \to GF$是自然变换，从而图(1.5.7)可交换，即$GF(h)\eta_{A'} = \eta_A h$.

据此，对于D中任意态射$g: FA \to B$，有

$$\begin{aligned}\varphi(gF(h)) &= G(gF(h))\eta_{A'} \\ &= G(g)GF(h)\eta_{A'} \\ &= G(g)\eta_A h \\ &= \varphi(g)h,\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{h} & A \\ \eta_{A'}\downarrow & & \downarrow\eta_A \\ GFA' & \xrightarrow{GF(h)} & GFA \end{array}$$

图(1.5.7)

于是图(1.5.8)可交换. 这表明$\varphi_{A;\,B}$关于A是自然的.

为证双射$\varphi_{A;\,B}$关于B是自然的，设$k: B \to B'$是D中任意态射. 由于$G: D \to C$是函子，从而对于D中任意态射$g: FA \to B$，有

$$\varphi(kg) = G(kg)\eta_A = G(k)G(g)\eta_A = G(k)\varphi(g).$$

于是图(1.5.9)可交换. 这表明$\varphi_{A,\,B}$关于B是自然的.

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathbf{D}}(FA,B) & \xrightarrow{\varphi} & Hom_{\mathbf{C}}(A,GB) \\ F(h)^{*}\downarrow & & \downarrow h^{*} \\ Hom_{\mathbf{D}}(FA',B) & \xrightarrow{\varphi} & Hom_{\mathbf{C}}(A',GB) \end{array}$$

图(1.5.8)

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathbf{D}}(FA,B) & \xrightarrow{\varphi} & Hom_{\mathbf{C}}(A,GB) \\ k_{*}\downarrow & & \downarrow G(k)_{*} \\ Hom_{\mathbf{D}}(FA,B') & \xrightarrow{\varphi} & Hom_{\mathbf{C}}(A,GB') \end{array}$$

图(1.5.9)

综上所证，则知(F, G, φ)是从$\mathbf{C}$到$\mathbf{D}$的伴随．

(ii) 由(i)对偶地证明．

(1.5.5)**定理** 设$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$是函子．若$\forall A\in ob(\mathbf{C})$，存在$\mathbf{D}$中对象$F_0A$和$\mathbf{C}$中态射$\eta_A:A\to G(F_0A)$使得$\eta_A$是从$A$到$G$的泛态射，则存在唯一函子$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$，使得$F_0$是函子$F$的对象函数，并且$(F, G, \varphi)$是从$\mathbf{C}$到$\mathbf{D}$的伴随，此处，对于$\mathbf{D}$中任意态射$g:FA\to B$，有

$$\varphi(g)=G(g)\eta_A:A\to GB.$$

证明 设$h:A\to A'$是$\mathbf{C}$中任意态射．因为$\eta_A:A\to G(F_0A)$是从A到G的泛态射．故对于$\mathbf{D}$中对象F_0A'，存在$\mathbf{D}$中唯一态射

$$F(h): F_0A \to F_0A',$$

使得图(1.5.10)可交换。这表明将C中任意态射$h: A \to A'$映为D中态射$F(h): F_0A \to F_0A'$，并且使得图(1.5.10)可交换的态射函数是由对象函数F_0唯一确定的。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(F_0A) \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \searrow^{\eta_{A'}h} & \downarrow{\scriptstyle G(F(h))} \\ A' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & G(F_0A') \end{array}$$

图(1.5.10)

将上述对象函数F_0，记作F，对于C中任意态射$k: A' \to A''$，则易见图(1.5.11)可交换。由于使得图(1.5.12)可交换的$F(kh)$是由kh唯一确定的，并且注意到G是函子，故得$F(kh) = F(k)F(h)$。同理易见$F(id_A) = id_{FA}$。所以，$F: C \to D$是函子。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(FA) \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(F(h))} \\ A' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & G(FA') \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(F(k))} \\ A'' & \xrightarrow{\eta_{A''}} & G(FA'') \end{array}$$

图(1.5.11)

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & G(FA) \\ {\scriptstyle kh}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(F(kh))} \\ A'' & \xrightarrow{\eta_{A''}} & G(FA'') \end{array}$$

图(1.5.21)

最后，易见$\forall A \in ob(C)$，由$A \mapsto \eta_A$给出一个自然变换$\eta: id_C \to GF$。因为$\eta_A: A \to G(FA)$是从A到G的泛态射，所以由定理

(1.5.4)可知$(F,\ G,\ \varphi)$是从C到D的伴随.

(1.5.6)**定理** 设$F:C\to D$是函子. 若$\forall B\in ob(D)$,存在C中对象G_0B和D中态射$\varepsilon_B:F(G_0B)\to B$使得$\varepsilon_B$是从$F$到$B$的泛态射，则存在唯一函子$G:D\to C$，使得$G_0$是函子$G$的对象函数，并且$(F,\ G,\ \varphi)$是从$C$到$D$的伴随，此处，对于$C$中任意态射$f:A\to GB$，有

$$\varphi^{-1}(f)=\varepsilon_B F(f):FA\to B.$$

证明 由定理(1.5.5)对偶地证明.

(1.5.7)**定理** 设$F:C\to D$和$G:D\to C$都是函子. 若自然变换$\eta:id_C\to GF$和自然变换$\varepsilon:FG\to id_D$使得图(1.5.13)和图(1.5.14)都可交换，则$(F,\ G,\ \varphi)$是从C到D的伴随，此处，对于D中任意态射$g:FA\to B$和C中任意态射$f:A\to GB$，有

$$\varphi(g)=G(g)\eta_A\text{和}\varphi^{-1}(f)=\varepsilon_B F(f).$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta_G} & GFG \\ & {\scriptstyle id_G}\searrow & \downarrow{\scriptstyle G(\varepsilon)} \\ & & G \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F(\eta)} & FGF \\ & {\scriptstyle id_F}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_F} \\ & & F \end{array}$$

图(1.5.13) 图(1.5.14)

证明 $\forall A\in ob(C)$和$\forall B\in ob(D)$，命映射

$$Hom_D(FA,\ B)\underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}}Hom_C(A,\ GB)$$

使得$\forall g\in Hom_D(FA,\ B)$和$\forall f\in Hom_C(A,\ GB)$，有

$$\varphi(g)=G(g)\eta_A\text{和}\psi(f)=\varepsilon_B F(f).$$

因为$\eta:id_C\to GF$是自然变换，故对于C中态射$f:A\to GB$，图(1.5.15)可交换，即

$$GF(f)\eta_A=\eta_{GB}f.$$

由此，得

$$
\begin{aligned}
\varphi\psi(f) &= \varphi(\varepsilon_B F(f)) \\
&= G(\varepsilon_B F(f))\eta_A \\
&= G(\varepsilon_B)GF(f)\eta_A \\
&= G(\varepsilon_B)\eta_{GB} f.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\eta_A} & GFA \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle GF(f)} \\
GB & \xrightarrow{\eta_{GB}} & GFGB
\end{array}
$$

图(1.5.15)

根据交换图(1.5.13)，则有$G(\varepsilon_B)\eta_{GB}=id_{GB}$。从而$\varphi(\psi(f))=f$。这表明映射$\varphi$是映射$\psi$的左逆。同理可证映射$\psi$是映射$\varphi$的左逆。所以，$\varphi$是双射。

最后，因为$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$和$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$都是函子，则容易验证$\varphi=\varphi_{A,B}$关于$A$和$B$都是自然的。

综上所证，则知(F, G, φ)是从$\mathbf{C}$到$\mathbf{D}$的伴随.

(1.5.8)**注** 根据定理(1.5.7)，故从$\mathbf{C}$到$\mathbf{D}$的伴随(F,G,φ)也常记作有序组$(F, G, \eta, \varepsilon)$。

(1.5.9)**定理** 设函子F，$F':\mathbf{C}\to\mathbf{D}$都是函子$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$的左伴随，则函子$F$和函子$F'$是自然同构的。

证明 设(F, G, φ)和(F',G,φ')都是从$\mathbf{C}$到$\mathbf{D}$的伴随，它们的单位分别是$\eta:id_C\to GF$与$\eta':id_C\to GF'$。根据定理(1.5.3)，则$\forall A\in ob(\mathbf{C})$，$\eta_A:A\to G(FA)$和$\eta'_A:A\to G(F'A)$都是从$A$到$G$的泛态射。再由定理(1.4.3)可知，存在唯一同构$\lambda_A:FA\to F'A$使得$\eta'_A=G(\lambda_A)\eta_A$。下面证明由$A\mapsto\lambda_A$给出一个自然变换

$$\lambda:F\to F'.$$

为此只须证明，对于$\mathbf{C}$中任意态射$h:A\to A'$，图(1.5.16)可交换。

$$
\begin{array}{ccc}
FA & \xrightarrow{\lambda_A} & F'A \\
F(h)\downarrow & & \downarrow F'(h) \\
FA' & \xrightarrow{\lambda_{A'}} & F'A'
\end{array}
$$

图(1.5.16)

事实上，由于η与η'都是自然变换，则易见$GF(h)\eta_A=\eta_{A'}h$与$GF'(h)\eta'_A=\eta'_{A'}h$。现在，考虑双射

$$\varphi=\varphi_{A;\,F'A'}:Hom_D(FA,\ F'A')\to Hom_C(A,\ GF'A'),$$

对于D中态射

$$F'(h)\lambda_A,\ \lambda_{A'}F(h):FA\to F'A',$$

由定理(1.5.3)，则有

$$
\begin{aligned}
\varphi(F'(h)\lambda_A)&=G(F'(h)\lambda_A)\eta_A\\
&=GF'(h)G(\lambda_A)\eta_A\\
&=GF'(h)\eta'_A\\
&=\eta'_{A'}h
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\varphi(\lambda_{A'}F(h))&=G(\lambda_{A'}F(h))\eta_A\\
&=G(\lambda_{A'})GF(h)\eta_A\\
&=G(\lambda_{A'})\eta_{A'}h\\
&=\eta'_{A'}h.
\end{aligned}
$$

所以，$F'(h)\lambda_A=\lambda_{A'}F(h)$。这表明图(1.5.16)可交换。

综上所证，则知$\lambda:F\to F'$是自然同构。

(1.5.10)**定理** 设函子G，$G':D\to C$都是函子$F:C\to D$的右伴随，则函子G和函子G'是自然同构的。

证明 由定理(1.5.9)对偶地证明。

(1.5.11)**定理** 设$F:C_1\to C_2$，$G:C_2\to C_1$都是函子，并且$F\dashv G$，又设$\bar{F}:C_2\to C_3$，$\bar{G}:C_3\to C_2$都是函子，并且$\bar{F}\dashv\bar{G}$，则

$\bar{F}F\dashv G\bar{G}$.

证明 设(F, G, φ)是从C_1到C_2的伴随，$(\bar{F}, \bar{G}, \bar{\varphi})$是从$C_2$到$C_3$的伴随，$\forall A_1\in ob(C_1)$与$\forall A_3\in ob(C_3)$，考虑

$$Hom_{C_3}(\bar{F}FA_1,\ A_3)\xrightarrow{\bar{\varphi}_{FA_1, A_3}}Hom_{C_2}(FA_1,\ \bar{G}A_3)$$

$$\xrightarrow{\varphi_{A_1, \bar{G}A_3}}Hom_{C_1}(A_1,\ G\bar{G}A_3),$$

则容易验证这个合成映射是双射，并且关于A_1和A_3都是自然的。所以，$\bar{F}F\dashv G\bar{G}$。

(1.5.12)**例** 由定理(1.5.5)和定理(1.5.3)，容易验证：

(i) 遗忘函子$G:Grp\to Set$有左伴随函子$F:Set\to Grp$，此处对于集X，FX是X上的自由群。

(ii) 设C是任意范畴，J是小范畴，则对角函子$\Delta:C\to C^J$有左伴随(或右伴随)当且仅当C有J型余极限(或极限)。

特别地，范畴C有终对象，始对象，乘积，余积，等化子，余等化子，拉回与推出等概念也都可用伴随函子描述。

(1.5.13)**定义** 对于具体范畴C，则遗忘函子$G:C\to Set$的左伴随函子$F:Set\to C$称作自由函子，FX称作集X上自由对象。

§1.6 范畴的等价

(1.6.1)**定义** 设$F:C\to D$是函子。若存在函子$G:D\to C$使得$GF\cong id_C$与$FG\cong id_D$，则称函子$F:C\to D$为范畴等价，并且称范畴C和范畴D是等价的。设C，D都是范畴，若C和D^{op}是等价的，则称C和D是对偶等价的。

(1.6.2)**命题** 范畴的等价关系是自反的，对称的与传递的。

证明 直接验证。

(1.6.3)**定理** 设$F:C\to D$是函子，则下列条件等价：

(i) 函子F是范畴等价；

(ii) 存在一个从C到D的伴随$(F, G, \eta, \varepsilon)$使得其单位$\eta$

和余单位ε都是自然同构；

(iii) 函子F是完全的与忠实的，并且$\forall B\in ob(\mathbf{D})$存在$A\in ob(\mathbf{C})$使得$FA\cong B$。

证明 (ii)$\Longrightarrow$(i)是显然的。

(i)$\Longrightarrow$(iii) 设函子$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是范畴等价，即存在函子$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$，使得

$$GF\cong id_C\text{与}FG\cong id_D.$$

故可设有自然变换$\alpha:GF\to id_C$是自然同构。

$$\begin{array}{ccc} GFA & \xrightarrow{\alpha_A} & A \\ {\scriptstyle GF(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ GFA' & \xrightarrow{\alpha_{A'}} & A' \end{array}$$

图(1.6.1)

首先，对于$\mathbf{C}$中任意态射集$Hom_C(A, A')$，任取$f\in Hom_C(A,A')$，因为α是自然变换，于是图(1.6.1)可交换，即

$$f\alpha_A=\alpha_{A'}GF(f).$$

但α还是自然同构，故有

$$f=\alpha_{A'}GF(f)\alpha_A^{-1}.$$

由此可知，$\forall f_1, f_2\in Hom_C(A, A')$，若$F(f_1)=F(f_2)$，则$f_1=f_2$。这表明函子$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是忠实的。同理可证函子$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$也是忠实的。

其次，对于$\mathbf{D}$中任意态射集$Hom_D(FA, FA')$，其中A和A'都是$\mathbf{C}$中任意对象，若$h\in Hom_D(FA, FA')$，令$f=\alpha_{A'}G(h)\alpha_A^{-1}$，则$G(h)=\alpha_{A'}^{-1}f\alpha_A$。又由交换图(1.6.1)等可知$GF(f)=\alpha_{A'}^{-1}f\alpha_A$。故得

$$GF(f)=G(h).$$

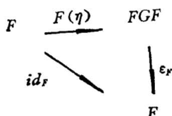
但函子$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$是忠实的，所以$F(f)=h$。这表明函子$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是完全的。

最后，$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，取$A=GB$，故$FA=FGB$。但是$FG\cong id_D$，所以$FGB\cong B$。

(iii)$\Longrightarrow$(ii)根据题设，则$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，存在$A\in ob(\mathbf{C})$

使得$FA\cong B$。令$GB=A$，即$FGB\cong B$。记$\varepsilon_B:FGB\cong B$为同构态射，则$\forall A\in ob(\mathbf{C})$，$\forall g\in Hom_D(FA,B)$，有$\varepsilon_B^{-1}g\in Hom_D(FA,FGB)$。于是由函子$F$是完全的和忠实的可知存在唯一态射$f\in Hom_C(A,GB)$使得$F(f)=\varepsilon_B^{-1}g$，即

$$g=\varepsilon_B F(f).$$



图(1.6.2)

这表明$\varepsilon_B:F(GB)\to B$是从F到B的泛态射．所以，由定理(1.5.6)可知，存在函子$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$使得$F\dashv G$，此处$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，由$B\mapsto\bar{\varepsilon}_B$给出伴随$F\dashv G$的余单位，即自然变换$\bar{\varepsilon}:FG\to id_D$，并且$\varepsilon$是自然同构。

设自然变换$\eta:id_C\to GF$是伴随$F\dashv G$的单位，则由定理(1.5.3)可知图(1.6.2)可交换．由此，$\forall A\in ob(\mathbf{C})$，有

$$\varepsilon_{FA}F(\eta_A)=id_{FA}.$$

于是$F(\eta_A)=\varepsilon_{FA}^{-1}$是同构态射。从而由函子$F$是完全的和忠实的可知，$\eta_A:A\to G(FA)$是同构态射。这表明自然变换$\eta:id_C\to GF$是自然同构。

(1.6.4)**例**　根据定理(1.6.3)，则全体有限集和映射的范畴与全体有限序数0，1，2，…，n，…和映射的范畴是等价的，此处$0=\phi$，与$n=\{0,1,\cdots,n-1\}$。

(1.6.5)**定理**　设$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是函子，则函子$F$是范畴同构当且仅当函子$F$是完全的和忠实的，并且对于$\mathbf{D}$中每个对象$B$存在$\mathbf{C}$中唯一对象$A$使得$FA=B$。

证明　必要性．若函子$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是范畴同构，则存在函子$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$，使得$GF=id_C$与$FG=id_D$。易见，这样的函子$G$是唯一的．于是$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，令$A=GB$，则$A\in ob(\mathbf{C})$，并且$FA=FGB=id_DB=B$。

由于函子F是范畴同构，从而它显然是范畴等价。所以，由

定理(1.6.3)可知，函子$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是完全的和忠实的。

充分性 设$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是函子，则$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，根据题设存在唯一的$A\in ob(\mathbf{C})$使得$FA=B$。令$GB=A$，则$FGB=B$。又对于$\mathbf{D}$中任意态射$g:B\to B'$，即$g:F(GB)\to F(GB')$，因为函子$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是完全的和忠实的，故存在$\mathbf{C}$中唯一态射$G(g):GB\to GB'$，使得$F(G(g))=g$。容易验证，这确定一个函子

$$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$$

使得$GF=id_{\mathbf{C}}$与$FG=id_{\mathbf{D}}$。所以，函子$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是范畴同构。

(1.6.6)**定理** 设$(F,\ G,\ \eta,\varepsilon)$是从范畴$\mathbf{C}$到范畴$\mathbf{D}$的伴随。则

(i) 函子$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$是忠实的当且仅当$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，$\varepsilon_B:FGB\to B$是满态射；

(ii) 函子$G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$是完全的当且仅当$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，$\varepsilon_B:FGB\to B$是可裂单态射；

(iii) 函子$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是忠实的当且仅当$\forall A\in ob(\mathbf{C})$，$\eta_A:A\to GFA$是单态射；

(iv) 函子$F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$是完全的当且仅当$\forall A\in ob(\mathbf{C})$，$\eta_A:A\to GFA$是可裂满态射。

证明 $\forall B,\ B'\in ob(\mathbf{D})$，考虑合成映射

$$Hom_{\mathbf{D}}(B,\ B')\xrightarrow{G_{B,B'}}Hom_{\mathbf{C}}(GB,\ GB')$$

$$\xrightarrow{\varphi^{-1}_{GB,B'}}Hom_{\mathbf{D}}(FGB,\ B'),$$

此处$(F,\ G,\ \varphi)$是从$\mathbf{C}$到$\mathbf{D}$的伴随$(F,\ G,\ \eta,\ \varepsilon)$。显然，映射$G_{B,B'}$与$\varphi^{-1}_{GB,B'}$关于$B$和$B'$都是自然的。因而，$\forall h\in Hom_{\mathbf{D}}(B,B')$，图(1.6.3)可交换。由此得$h\varphi^{-1}(G(id_B))=\varphi^{-1}(G(h))$。注意到$\varphi^{-1}(G(id_B))=\varepsilon_B$，故$\varepsilon^*_B(h)=h\varepsilon_B=\varphi^{-1}(G(h))$。这表明$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，自然变换的合成

$$Hom_D(B, -) \xrightarrow{G_{B,-}} Hom_C(GB, G(-))$$
$$\xrightarrow{\varphi^{-1}_{GB,-}} Hom_D(FGB, -)$$

与由ε_B诱导的自然变换

$$\varepsilon_B^*: Hom_D(B, -) \longrightarrow Hom_D(FGB, -)$$

是相等的.

$$\begin{array}{ccc} Hom_D(B,B) & \xrightarrow{\varphi^{-1}_{GB,B}G_{B,B}} & Hom_D(FGB,B) \\ \downarrow h_* & & \downarrow h_* \\ Hom_D(B,B') & \xrightarrow{\varphi^{-1}_{GB,B'}G_{B,B'}} & Hom_D(FGB,B') \end{array}$$

图(1.6.3)

现在，函子G是忠实的是指$\forall B, B' \in ob(\mathbf{D})$,

$$G_{B,B'}: Hom_D(B, B') \longrightarrow Hom_C(GB, GB')$$

是单射. 因为$\varphi^{-1}_{GB,B'}$是双射，故从上述讨论可知这等价于$\forall B' \in ob(\mathbf{D})$,

$$\varepsilon^*_{B;B'} = (\varepsilon^*_B)_{B'}: Hom(B, B') \to Hom(FGB, B')$$

是单射. 容易验证这又等价于ε_B是满态射. 所以，G是忠实的当且仅当$\forall B \in ob(\mathbf{D})$，$\varepsilon_B$是满态射. 即(i)成立.

为证(ii)，函子G是完全的是指$\forall B, B' \in ob(\mathbf{D})$,

$$G_{B,B'}: Hom_D(B, B') \to Hom_C(GB, GB')$$

是满射. 因为$\varphi^{-1}_{GB;B'}$是双射，故易见这等价于$\forall B' \in ob(\mathbf{D})$,

$$\varepsilon^*_{B;B'} = (\varepsilon^*_B)_{B'}: Hom(B, B') \to Hom(FGB, B')$$

是满射. 但是这等价于ε_B是可裂单态射. 所以，G是完全的当且仅当$\forall B \in ob(\mathbf{D})$，$\varepsilon_B$是可裂单态射. 即(ii)成立.

(iii)和(iv)可以分别由(i)和(ii)对偶地证明.

§ 1.7 Monad

(1.7.1) **定义** 设C是范畴，$T:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$是函子，$\eta: id_C\to T$ 和 $\mu: TT\to T$都是自然变换. 若图(1.7.1)和图(1.7.2)都可交换,则称三元组$\mathbb{T}=(T,\ \eta,\ \mu)$为$\mathbf{C}$上Monad.

$$
\begin{array}{ccccc}
T & \xrightarrow{T(\eta)} & TT & \xleftarrow{\eta_T} & T \\
 & {\scriptstyle id_T}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \mu} & \swarrow{\scriptstyle id_T} & \\
 & & T & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
TTT & \xrightarrow{T(\mu)} & TT \\
{\scriptstyle \mu_T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\
TT & \xrightarrow{\mu} & T
\end{array}
$$

图(1.7.1) 图(1.7.2)

(1.7.2) **例** 设$(F,\ G,\ \eta,\ \varepsilon)$是从范畴$\mathbf{C}$到范畴$\mathbf{D}$的伴随. 命

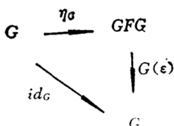
$$T=GF:\mathbf{C}\to\mathbf{C},\quad \mu=G(\varepsilon_F):TT\to T.$$

由于$\varepsilon: FG\to id_D$是自然变换，故$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，易见图(1.7.3)可交换. 由此，自然变换的图(1.7.2)可交换.

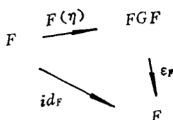
$$
\begin{array}{ccc}
FGFG(B) & \xrightarrow{FG(\varepsilon_B)} & FG(B) \\
{\scriptstyle \varepsilon_{FG(B)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_B} \\
FG(B) & \xrightarrow{\varepsilon_B} & B
\end{array}
$$

图(1.7.3)

类似地，因为$(F, G, \eta, \varepsilon)$是从$C$到$D$的伴随，故由定理(1.5.3)可知图(1.7.4)和图(1.7.5)都可交换。由此，易见图(1.7.1)可交换。



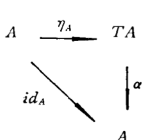
图(1.7.4)



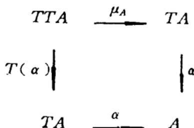
图(1.7.5)

综上所述，则知$\mathbb{T}=(T, \eta, \mu)$是$C$上Monad，称作由伴随$(F, G, \eta, \varepsilon)$诱导的Monad。

(1.7.3)**定义** 设$\mathbb{T}=(T, \eta, \mu)$是范畴$C$上Monad，$A\in ob(C)$。若$C$中态射$\alpha: TA\to A$使得图(1.7.6)和图(1.7.7)都可交换，则称偶(A, α)为C中$\mathbb{T}$-代数。



图(1.7.6)



图(1.7.7)

设(A, α)和(B, β)都是范畴C中$\mathbb{T}$-代数。若C中态射$f: A\to B$使得图(1.7.8)可交换，则称$f:(A, \alpha)\to(B, \beta)$是$\mathbb{T}$-代数同态。

容易验证，以范畴$\mathbf{C}$中$\mathbb{T}$-代数为对象，以$\mathbb{T}$-代数同态为态射构成一个范畴，记作$\mathbf{C}^{\mathbb{T}}$。

设$\mathbb{T}=(T,\ \eta,\ \mu)$是范畴$\mathbf{C}$上Monad，$A\in ob(\mathbf{C})$。因为图(1.7.9)和图(1.7.10)都可交换，故$(TA,\ \mu_A)$是$\mathbf{C}$中$\mathbb{T}$-代数。又因为μ: $TT\to T$是自然变换，故对于$\mathbf{C}$中任意态射f: $A\to B$，图(1.7.11)可交换。从而$T(f)$: $(TA,\ \mu_A)\to(TB,\ \mu_B)$是$\mathbb{T}$-代数同态。命函子

$$
\begin{array}{ccc}
TA & \xrightarrow{T(f)} & TB \\
\alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\
A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}
$$

图(1.7.8)

$$F^{\mathbb{T}}:\mathbf{C}\to\mathbf{C}^{\mathbb{T}}$$

使得$F^{\mathbb{T}}$将$\mathbf{C}$中对象A映为$\mathbf{C}^{\mathbb{T}}$中对象$(TA,\ \mu_A)$，并且$F^{\mathbb{T}}$将$\mathbf{C}$中态射f: $A\to B$映为$\mathbf{C}^{\mathbb{T}}$中态射$T(f):(TA,\mu_A)\to(TB,\mu_B)$。容易验证：$F^{\mathbb{T}}:\mathbf{C}\to\mathbf{C}^{\mathbb{T}}$是函子。

$$
\begin{array}{ccc}
TA & \xrightarrow{\eta_{TA}} & TTA \\
 & {}_{id_{TA}}\searrow & \downarrow\mu_A \\
 & & TA
\end{array}
$$

图(1.7.9)

$$
\begin{array}{ccc}
TTTA & \xrightarrow{\mu_{TA}} & TTA \\
T(\mu_A)\downarrow & & \downarrow\mu_A \\
TTA & \xrightarrow{\mu_A} & TA
\end{array}
$$

图(1.7.10)

$$
\begin{array}{ccc}
TTA & \xrightarrow{TT(f)} & TTB \\
\mu_A\downarrow & & \downarrow\mu_B \\
TA & \xrightarrow{T(f)} & TB
\end{array}
$$

图(1.7.11)

设$\mathbb{T}=(T, \eta, \mu)$是范畴C上Monad，记

$$G^{\mathbb{T}}: C^{\mathbb{T}} \to C$$

为遗忘函子，即$G^{\mathbb{T}}$将$C^{\mathbb{T}}$中对象(A, α)映为C中对象A，并且$G^{\mathbb{T}}$将$C^{\mathbb{T}}$中态射$f:(A, \alpha)\to(B, \beta)$映为$C$中态射$f: A\to B$。

(1.7.4) **定理** 设$\mathbb{T}=(T, \eta, \mu)$是范畴C上Monad，则

(i) $(F^{\mathbb{T}}, G^{\mathbb{T}}, \eta^{\mathbb{T}}, \varepsilon^{\mathbb{T}})$是从C到$C^{\mathbb{T}}$的伴随，其中$\eta^{\mathbb{T}}=\eta$，并且对于C中任意$\mathbb{T}$-代数$(A, \alpha)$，$\varepsilon^{\mathbb{T}}_{(A;\alpha)}=\alpha:(TA, \mu_A)\longrightarrow(A, \alpha)$；

(ii)由伴随$(F^{\mathbb{T}}, G^{\mathbb{T}}, \eta^{\mathbb{T}}, \varepsilon^{\mathbb{T}})$诱导的C上Monad就是$\mathbb{T}=(T, \eta, \mu)$。

证明 (i)因为$\forall A\in ob(C)$，$G^{\mathbb{T}}F^{\mathbb{T}}(A)=TA$，故$\eta^{\mathbb{T}}=\eta: id_C\longrightarrow G^{\mathbb{T}}F^{\mathbb{T}}$是自然变换。又因为$\forall(A, \alpha)\in ob(C^{\mathbb{T}})$，$F^{\mathbb{T}}G^{\mathbb{T}}(A, \alpha)=(TA, \mu_A)$，故由$\mathbb{T}$-代数同态的定义，易见$\mathbb{T}$-代数同态

$$\varepsilon^{\mathbb{T}}_{(A,\alpha)}=\alpha: F^{\mathbb{T}}G^{\mathbb{T}}(A,\alpha)\longrightarrow(A,\alpha)$$

关于$(A, \alpha)\in ob(C^{\mathbb{T}})$是自然的，即

$$\varepsilon^{\mathbb{T}}: F^{\mathbb{T}}G^{\mathbb{T}}\longrightarrow id_{C^{\mathbb{T}}}$$

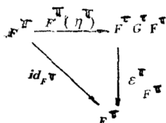
是自然变换。此外，因为$\forall A\in ob(C)$，图(1, 7, 12)和图(1.7.13)都可交换，故易证图(1.7.14)和图(1. 7.15)都可交换。所以，由定理(1. 5.7)可知$(F^{\mathbb{T}}, G^{\mathbb{T}}, \eta^{\mathbb{T}}, \varepsilon^{\mathbb{T}})$是从C到$C^{\mathbb{T}}$的伴随。

$$\begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{T(\eta_A)} & TTA \\ & \searrow^{id_{TA}} & \downarrow \mu_A \\ & & TA \end{array}$$

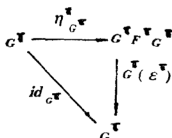
图(1.7.12)

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & TA \\ & \searrow^{id_A} & \downarrow \alpha \\ & & A \end{array}$$

图(1.7.13)



图(1.7.14)



图(1.7.15)

(ii) 因为$G^{\mathbb{T}}F^{\mathbb{T}}=T$，$\eta^{\mathbb{T}}=\eta$与$\mu^{\mathbb{T}}=G^{\mathbb{T}}\left(\varepsilon^{\mathbb{T}}_{F^{\mathbb{T}}}\right)$满足：$\forall A\in ob(\mathbf{C})$，有

$$\mu^{\mathbb{T}}_{A}=G^{\mathbb{T}}\left(\varepsilon^{\mathbb{T}}_{F^{\mathbb{T}}A}\right)=G^{\mathbb{T}}\left(\varepsilon^{\mathbb{T}}_{(TA,\mu_A)}\right)=G^{\mathbb{T}}(\mu_A)=\mu_A,$$

所以，由伴随$(F^{\mathbb{T}},\ G^{\mathbb{T}},\ \eta^{\mathbb{T}},\ \varepsilon^{\mathbb{T}})$诱导的$\mathbf{C}$上Monad 就是 $\mathbb{T}=(T,\ \eta,\ \mu)$。

(1.7.5) **定理** 设$(F,\ G,\ \eta,\varepsilon)$是从范畴$\mathbf{C}$到$\mathbf{D}$的伴随，$\mathbb{T}=(GF,\eta,G(\varepsilon_F))$是由该伴随诱导的$\mathbf{C}$上Monad，则存在唯一函子

$$K:\mathbf{D}\longrightarrow\mathbf{C}^{\mathbb{T}}$$

使得$G^{\mathbb{T}}K=G$与$KF=F^{\mathbb{T}}$，函子K称作比较函子。

证明 因为$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，存在$\mathbf{C}$中态射$G(\varepsilon_B):GFGB\longrightarrow GB$，并且$\varepsilon:FG\longrightarrow id_D$是自然变换，故易见图 (1. 7. 16)可交换。又图(1. 7. 17)显然可交换，这表明 $(GB,\ G(\varepsilon_B))$是$\mathbf{C}$上$\mathbb{T}$-代数。再由$\varepsilon:FG\longrightarrow id_D$是自然变换，故易见对于$\mathbf{D}$中任意态射$f:B\longrightarrow B'$，图(1.7. 18)可交换，这表明$G(f):(GB,\ G(\varepsilon_B))\longrightarrow(GB',\ G(\varepsilon_{B'}))$是$\mathbb{T}$-代数同态。

命

$$K:\mathbf{D}\longrightarrow\mathbf{C}^{\mathbb{T}}$$

使得对于$\mathbf{D}$中任意对象B和任意态射$f:B\longrightarrow B'$，有

$$KB=(GB,\ G(\varepsilon_B))$$

和

$$K(f)=G(f):(GB,\ G(\varepsilon_B))\longrightarrow(GB',\ G(\varepsilon_{B'})),$$

则易证K是函子，并且满足

$$KF=F^{\mathbf{T}}\text{ 与 }G^{\mathbf{T}}K=G.$$

$$\begin{array}{ccc}
GFGFGB & \xrightarrow{GFG(\varepsilon_B)} & GFGB \\
\mu_{GB}=G(\varepsilon_{FGB})\downarrow & & \downarrow G(\varepsilon_B) \\
GFGB & \xrightarrow{G(\varepsilon_B)} & GB
\end{array}$$

图(1.7.16)

$$\begin{array}{ccc}
GB & \xrightarrow{\eta_{GB}} & GFGB \\
 & \searrow{id_{GB}} & \downarrow G(\varepsilon_B) \\
 & & GB
\end{array}$$

图(1.7.17)

$$\begin{array}{ccc}
GFGB & \xrightarrow{GFG(f)} & GFGB' \\
G(\varepsilon_B)\downarrow & & \downarrow G(\varepsilon_{B'}) \\
GB & \xrightarrow{G(f)} & GB'
\end{array}$$

图(1.7.18)

为证唯一性，设$K':\mathbf{D}\longrightarrow C^{\mathbf{T}}$也是函子，并且满足

$$K'F=F^{\mathbf{T}}\text{与}G^{\mathbf{T}}K'=G,$$

则$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，因为$G^{\mathbf{T}}K'=G$，故存在$\mathbf{C}$中态射$\alpha:GFGB\longrightarrow GB$使得$K'B=(GB,\ \alpha)$，并且对于$\mathbf{D}$中任意态射$f:B\longrightarrow B'$，有$K'(f)=G(f)$ 。因为 $(F,\ G,\ \eta,\ \varepsilon)$和$(F^{\mathbf{T}},\ G^{\mathbf{T}},\ \eta^{\mathbf{T}},\varepsilon^{\mathbf{T}})$ 分别是从$\mathbf{C}$到$\mathbf{D}$和从$\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{C}^{\mathbf{T}}$ 的伴随，并且$\eta=\eta^{\mathbf{T}}$，故由 $K'F=F^{\mathbf{T}}$ 和$G^{\mathbf{T}}K'=G$，容易验证：$\forall A\in ob(\mathbf{C})$和$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，图(1.7.19)可交换。此处$\forall f\in Hom_{D}\ (FA,\ B)$ 和 $\forall f'\in Hom_{C^{\mathbf{T}}}\ (F^{\mathbf{T}}A,\ K'B)$，有

$$\varphi(f)=G(f)\eta_A\text{和}\varphi'(f')=G^{\mathbf{T}}\ (f')\eta_A^{\mathbf{T}}.$$

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{D}(FA,B) & \xrightarrow{\ \varphi\ } & Hom_{C}(A,GB) \\
\downarrow K'_{FA,B} & & \| \\
Hom_{C^{\mathbf{T}}}(K'FA,K'B) & & Hom_{C}(A,G^{\mathbf{T}}K'B) \\
\| & \nearrow \varphi' & \\
Hom_{C^{\mathbf{T}}}(F^{\mathbf{T}}A,K'B) & &
\end{array}$$

图(1.7.19)

从而φ和φ'都是双射。在这个交换图中，令$A=GB$，则

$$K'(\varphi^{-1}(id_{GB}))=\varphi'^{-1}(id_{G^{\mathbf{T}}K'B}),$$

即$K'(\bar{\varepsilon}_B)=\varepsilon^{\mathbf{T}}_{KB}$。于是有

$$G(\bar{\varepsilon}_B)=K'(\bar{\varepsilon}_B)=\bar{\varepsilon}^{\mathbf{T}}_{K'B}=\bar{\varepsilon}^{\mathbf{T}}_{(GB,\alpha)}=\alpha.$$

根据上述结果，则$\forall B\in ob(\mathbf{D})$，有

$$K'B=(GB,\ \alpha)=(GB,\ G(\varepsilon_B))=KB.$$

这表明函子K'与函子K的对象函数相等。又，易见对于$\mathbf{D}$中任意态射$f:B\longrightarrow B'$，有

$$K'(f)=G(f)=K(f).$$

所以，$K'=K$，即满足定理条件的函子K是唯一的。

(1.7.6) **定义** 设 (F, G, η, ε) 是从范畴$\mathbf{C}$到范畴$\mathbf{D}$的伴随，$\mathbb{T}=(GF,\eta,G(\varepsilon_F))$ 是由这个伴随诱导的范畴$\mathbf{C}$上Monad。若比较函子

$$K:\mathbf{D}\longrightarrow \mathbf{C}^{\mathbb{T}}$$

是范畴等价，则称伴随(F,G,η, ε)(或简称函子G)是monadic。进而，若比较函子K是范畴同构，则称伴随 (F, G, η,ε)是严格monadic。

对于具体范畴$\mathbf{D}$，若遗忘函子

$$G:\mathbf{D}\longrightarrow \mathbf{Set}$$

是monadic，即存在函子$F:\mathbf{Set}\longrightarrow\mathbf{D}$和从范畴$\mathbf{Set}$到具体范畴$\mathbf{D}$的伴随($F$, G, η, ε)，使得这个伴随是monadic，则称$\mathbf{D}$为代数范畴。

(1.7.7) **例** 可以证明，范畴$\mathbf{Grp}$和紧Hausdorff空间与连续映射的范畴 $KHausSp$ 都是代数范畴。

第2章 格 论

格是随着经典逻辑的代数化与泛代数的发展而引进的一个新的代数系统.近代格论大约形成于本世纪30年代，G·Birkhoff的专著《Lattice Theory》(第一版)是这个时期的格论及其对于数理逻辑、泛代数、一般拓朴学、泛函分析和概率论等数学分支中应用的系统总结.近年来，由于序与偏序集理论又在组合数学、Fuzzy数学、计算机科学、甚至社会科学中得到了广泛的应用，因而使格论有了较大的发展，它已成为数学的重要分支之一.本章除了介绍关于偏序集与格的一些基本概念外，着重讨论了与本书主题密切相关联的若干内容，如偏序集上的伴随函子、*Heyting*代数与完全分配格理论等.

§2.1 偏 序 集

(2.1.1) **定义** 设P是集，$\leqslant$是P上二元关系.若满足：

(i) 自反性：$\forall a\in P$，$a\leqslant a$；

(ii) 反对称性：$\forall a$，$b\in P$，若$a\leqslant b$，$b\leqslant a$，则$a=b$；

(iii) 传递性：$\forall a,b$，$c\in P$，若$a\leqslant b$，$b\leqslant c$，则$a\leqslant c$，

则称$\leqslant$为P上偏序关系，称$(P,\leqslant)$为偏序集.在不引起混淆的情况下，常把这偏序集$(P,\leqslant)$简记作P.若它还满足：

(iv) 全序性：$\forall a$，$b\in P$，必有$a\leqslant b$者$b\leqslant a$，

则称$(P,\leqslant)$为全序集，又称链，称$\leqslant$为全序关系.

注意，若$a\leqslant b$，则也常记作$b\geqslant a$.

(2.1.2) **例** 设$P(S)$是集S上的幂集，若对于$A,B\in P(S)$规定

$$A\leqslant B\Longleftrightarrow A\subseteq B,$$

则$(P(S),\ \leqslant)$是偏序集，但一般不是全序集。

(2.1.3) **例** 设$(P,\ \leqslant)$是偏序集，则其对偶集$(P^{op},\leqslant_{oP})$是偏序集，其中$P^{op}=P$，并且$\forall a,\ b\in P^{op}$，有

$$a\leqslant_{op}b\Longleftrightarrow b\leqslant a.$$

(2.1.4) **定义** 设$(P,\ \leqslant)$是偏序集，又设$a,\ b\in P$。若$\forall x\in P$都有$x\leqslant a$，则称a是P的最大元；若$\forall x\in P$都有$b\leqslant x$，则称b是P的最小元。又设$u,\ v\in P$。若$\forall x\in P$，当$u\leqslant x$时，有$u=x$，则称u是P的极大元；若$\forall x\in P$，当$x\leqslant v$时，有$v=x$，则称v是P的极小元。

对于偏序集，最大元与最小元未必存在。如果存在，则分别是唯一的极大元与极小元。任意有限偏序集必有极大元与极小元。但是未必有最大元与最小元。对于全序集，则最大元与极大元，最小元与极小元分别是一致的。

(2.1.5) **定义** 设$(P,\ \leqslant)$是偏序集，$S\subseteq P$，并且$u,\ v\in P$。若$\forall x\in S$，有$x\leqslant u$，则称u是S的上界。若$\forall x\in S$，有$v\leqslant x$，则称v是S的下界。

注意 一般说来，S的上界或下界未必存在。即使存在未必唯一，并且未必属于S。

设$(P,\ \leqslant)$是偏序集，$S\subseteq P$，$a\in P$。若

(i) a是S的一个上界(即$\forall s\in S,\ s\leqslant a$)；

(ii) 若$c\in P$满足$\forall s\in S$，有$s\leqslant c$，则$a\leqslant c$，

则称a是S的最小上界，或称是S的上确界。记作$\bigvee S$或$\sup S$。这时也称S有并。

设$(P,\ \leqslant)$是偏序集，$S\subseteq P$，$b\in P$。若

(i) b是S的一个下界(即$\forall s\in S,\ b\leqslant S$)；

(ii) 若$c\in P$满足$\forall s\in S$，有$c\leqslant s$，则$c\leqslant b$，

则称b是S的最大下界，或称是S的下确界。记作$\bigwedge S$或$inf\ S$。这时也称S有交。

对于偏序集$(P, \leqslant)$中任意子集S，其上确界或下确界未必存在．如果$\bigvee S$或$\bigwedge S$存在，则由反对称性可知必唯一，但是未必属于S．

若$S=\{a, b\}$，则记

$$\bigvee S=a\vee b \text{ 与 } \bigwedge S=a\wedge b.$$

若$S=\phi$，则P的每一元都是它的上界，也都是它的下界．显然，ϕ有没有上确界与下确界，则分别取决于P有没有最小元与最大元．若P存在最大元1与最小元0，则

$$\bigvee\phi=0\text{与}\bigwedge\phi=1.$$

(2.1.6) **定理** 设$(P, \leqslant)$是偏序集，则$\forall a, b\in P$，有

$$a=a\wedge b\Longleftrightarrow a\leqslant b\Longleftrightarrow b=a\vee b.$$

证明 直接验证．

(2.1.7) **定义** 设$(P, \leqslant_1)$与$(Q, \leqslant_2)$都是偏序集，$f: P\to Q$是映射．

(i) 若$\forall a, b\in P$，当$a\leqslant_1 b$时有$f(a)\leqslant_2 f(b)$，则称f是保序映射或序同态；

(ii) 若$\forall a, b\in P$，当$a\leqslant_1 b$时有$f(b)\leqslant_2 f(a)$，则称f是逆序映射；

(iii) 若$\forall S\subseteq P$，有$f(\bigvee S)=\bigvee f(S)$，则称$f$为保任意并映射，或简称保并映射；

(iv) 若$\forall S\subseteq P$，有$f(\bigwedge S)=\bigwedge f(S)$，则称$f$为保任意交映射，或简称保交映射．

当(iii)与(iv)中S限定为有限集时，则分别称f为保有限并映射与保有限交映射．

显然，保有限并映射或保有限交映射都是保序映射，反之不然．

(v) 若f是单满保序映射，并且f^{-1}也是保序映射，则称f为序同构．

注意 以后对于不同的偏序集，它们的偏序关系常常用同一

记号$\leqslant$表示。根据上下文关系，这不会引起混淆的。

设$(P,\leqslant)$是偏序集，则P可以看作一个范畴，其对象为P的元，并且对于$x, y\in P$，态射集$Hom(x, y)$为单元集或空集，分别依$x\leqslant y$或$x\nleqslant y$而定。若A与B都是偏序集，则保序映射

$$f: A\to B$$

可以视为范畴之间的函子。

设$(P,\leqslant)$是偏序集，视P为范畴，则其对偶范畴$(P^{op},\leqslant_{op})$也是偏序集(见例(2.1.3))。显然，P中的上确界（或下确界）是P^{op}中的下确界（或上确界）。事实上，作为范畴，对偶原理适用于偏序集。

在今后的证明中，常常要用到一个重要的集论工具，即Zorn引理。它与选择公理是等价的。

(2.1.8) **Zorn引理** 设$(P,\leqslant)$是偏序集。若P的每个全序子集在P中都有上界，则P中必含有极大元。

§2.2 半格与半格同态

(2.2.1) **定义** 设$(P,\leqslant)$是偏序集。

(i) 若P的有限子集都有并，则称$(P,\leqslant)$为$\vee$-半格或并半格，常记作$(P, \vee, 0)$其中$0=\vee\phi$，它是P的最小元；

(ii) 若P的有限子集都有交，则称$(P,\leqslant)$为$\wedge$-半格或交半格，常记作$(P, \wedge, 1)$，其中$1=\wedge\phi$，它是P的最大元。

$\vee$-半格与$\wedge$-半格统称为半格。

(2.2.2) **定理** （半格的特征性质）设$(S, \vee, 0)$是$\vee$-半格，则

(i) 幂等律：$\forall a\in S$，$a\vee a=a$；

(ii) 交换律：$\forall a, b\in S$，$a\vee b=b\vee a$；

(iii) 结合律：$\forall a, b, c\in S$，$a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$；

(iv) 单位律：$\forall a\in S$，$a\vee 0=a$。

设$(S, \wedge, 1)$是$\wedge$-半格，则

(i) 幂等律：$\forall a \in S$，$a \wedge a = a$；

(ii) 交换律：$\forall a, b \in S$，$a \wedge b = b \wedge a$；

(iii) 结合律：$\forall a, b, c \in S$，$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$；

(iv) 单位律：$\forall a \in S$，$a \wedge 1 = a$.

证明 直接验证.

(2.2.3)定理

(i) 设S是非空集，$\vee$是S上二元运算，$o \in S$. 若满足定理(2.2.2)的第一部分中四个条件，则S关于

$$a \leqslant b \iff a \vee b = b$$

构成$\vee$-半格；

(ii) 设S是非空集，$\wedge$是S上二元运算，$1 \in S$. 若满足定理(2.2.2)的第二部分中四个条件，则S关于

$$a \leqslant b \iff a \wedge b = a$$

构成$\wedge$-半格.

证明 (i)由定理(2.1.6)规定：

$$a \leqslant b \iff a \vee b = b.$$

则由幂等律知$\leqslant$满足自反性.

设$a \leqslant b$与$b \leqslant c$，则

$$\begin{aligned} a \vee c &= a \vee (b \vee c) && \text{(根据}b \leqslant c\text{)} \\ &= (a \vee b) \vee c && \text{(根据结合律)} \\ &= b \vee c && \text{(根据}a \leqslant b\text{)} \\ &= c. && \text{(根据}b \leqslant c\text{)} \end{aligned}$$

所以，$a \leqslant c$，即$\leqslant$满足传递性.

设$a \leqslant b$与$b \leqslant a$，则

$$\begin{aligned} b &= a \vee b && \text{(根据}a \leqslant b\text{)} \\ &= b \vee a && \text{(根据交换律)} \\ &= a. && \text{(根据}b \leqslant a\text{)} \end{aligned}$$

所以，$a = b$，即$\leqslant$满足反对称性.

综上所证，则知$\leqslant$是S上偏序关系，故$(S, \leqslant)$是偏序集.

任取$a, b\in S$，因为$\vee$是S上二元运算，故$a\vee b\in S$. 余证$a\vee b$是a与b的并（即上确界）. 事实上，由

$$a\vee(a\vee b)=(a\vee a)\vee b=a\vee b,$$

得$a\leqslant a\vee b$，与由

$b\vee(a\vee b)=(a\vee b)\vee b=a\vee(b\vee b)=a\vee b$，得$b\leqslant a\vee b$. 这表明$a\vee b$是$a$与$b$的上界. 若存在$c\in S$使得$a\leqslant c$与$b\leqslant c$，则从

$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)=a\vee c=c$，得$a\vee b\leqslant c$. 于是$a\vee b$是$a$与$b$的最小上界. 此外，由单位律等可知0是$S$的最小元，即$\vee\phi=0$. 上述表明：$S$对有限并封闭，所以$(S, \vee, 0)$是$\vee$-半格.

(ii) 由对偶原则即证.

(2.2.4) **定义** 设$(P, \vee, o_P)$，$(Q, \vee, o_Q)$都是$\vee$-半格，$f: P\to Q$是映射. 若f保有限并，即$\forall a, b\in P$，有

$$f(a\vee b)=f(a)\vee f(b)$$

与

$$f(o_P)=o_Q\text{即}f(\vee\phi)=\vee f(\phi),$$

则称f为$\vee$-半格同态.

设$(P, \wedge, 1_P)$，$(Q, \wedge, 1_Q)$都是$\wedge$-半格，f: $P\to Q$是映射. 若f保有限交，即$\forall a, b\in P$，有

$$f(a\wedge b)=f(a)\wedge f(b)$$

与

$$f(1_P)=1_Q\text{即}f(\wedge\phi)=\wedge f(\phi),$$

则称f为$\wedge$-半格同态.

单满$\vee$-半格同态，称作$\vee$-半格同构. 单满$\wedge$-半格同态，称作$\wedge$-半格同构.

(2.2.5) **命题** 设P，Q都是$\vee$-半格，$f: P\to Q$是映射，则

(i) 若f是$\vee$-半格同态，则f是序同态；

(ii) 若f是序同态，则$\forall a, b\in P$，有

$$f(a\vee b)\geqslant f(a)\vee f(b);$$

(iii) f是$\vee$-半格同构$\Longleftrightarrow f$是序同构.

证明 (i)设f为$\vee$-半格同态. 若a, $b\in P$, $a\leqslant b$, 则$a\wedge b=b$.于是$f(b)=f(a\vee b)=f(a)\vee f(b)$.所以,$f(a)\leqslant f(b)$.即$f$为序同态.

(ii) 显然.

(iii) 设f是$\vee$-半格同构. 若c, $d\in Q$,$c\leqslant d$, 则由f是单满映射与f保有限并可知:

$$f(f^{-1}(c)\vee f^{-1}(d))=ff^{-1}(c)\vee ff^{-1}(d)=c\vee d.$$

于是

$$f^{-1}(c\vee d)=f^{-1}\{f[f^{-1}(c)\vee f^{-1}(d)]\}=f^{-1}(c)\vee f^{-1}(d),$$

并且易见$f^{-1}(0_Q)=0_P$. 从而,f^{-1}是$\vee$-半格同态. 所以由(i)可知f与f^{-1}都是序同态, 但题设f是双射, 这就证明了f是序同构.

反之, 设f是序同构, 即f是双射,f与f^{-1}都是序同态. 若a, $b\in P$, 记$c=a\vee b$, 则由f保序可知$f(a)\leqslant f(c)$与$f(b)\leqslant f(c)$, 从而

$$f(a)\vee f(b)\leqslant f(c).$$

若有$d^*\in Q$使得$f(a)\leqslant d^*$与$f(b)\leqslant d^*$, 则由f是双射可知有$d\in P$使得$f(d)=d^*$. 于是由f^{-1}保序可知 $a\leqslant d$与$b\leqslant d$, 故得$c=a\vee b\leqslant d$. 因此 $f(c)\leqslant f(d)=d^*$. 所以,

$$f(a)\vee f(b)=f(a\vee b).$$

此外, 易见$f(0_P)=o_Q$. 综上所证, 则知f保有限并,即f是$\vee$-半格同态. 但是, 题设f是双射, 所以, f是$\vee$-半格同构.

(2.2.6) **命题** 设P, Q都是$\wedge$-半格, $f:P\to Q$是映射, 则

(i) 若f是$\wedge$-半格同态, 则f是序同态;

(ii) 若f是序同态, 则$\forall a$, $b\in P$, 有

$$f(a\wedge b)\leqslant f(a)\wedge f(b);$$

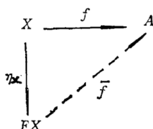
(iii) f是$\wedge$-半格同构$\Longleftrightarrow f$是序同构.

证明 这是命题(2.2.5)的对偶命题.

(2.2.7) **定义**

(i) 设 $(S, \vee, 0)$ 为 $\vee$-半格，$M \subseteq S$。若 M 关于 S 中有限并运算封闭，即 $\forall a, b \in M$，有 $a \vee b \in M$ 与 $0 \in M$，则称 $(M, \vee, 0)$ 为子 $\vee$-半格；

(ii) 设 $(S, \wedge, 1)$ 为 $\wedge$-半格，$M \subseteq S$，若 M 关于 S 中有限交运算封闭，即 $\forall a, b \in M$，有 $a \wedge b \in M$ 与 $1 \in M$，则称 $(M, \wedge, 1)$ 为子 $\wedge$-半格。



图(2.2.1)

(2.2.8) **定义** 设 X 是集，若存在 $\vee$-半格 FX 和映射 $\eta_X: X \to FX$ 使得对于任意的 $\vee$-半格 A 和映射 $f: X \to A$ 都存在唯一的 $\vee$-半格同态 $\bar{f}: FX \to A$ 满足 $\bar{f}\eta_X = f$，则称 FX 为由集 X 生成的自由 $\vee$-半格。

显然，若自由并半格存在，则在同构的意义下，它是唯一的。此外，映射 η_X 必是单射，故可将 X 看作 FX 的子集。

(2.2.9) **命题** 设 X 是集，则由 X 生成的自由并半格 FX 是 X 的所有有限子集之族，并半格运算即是集的并运算。

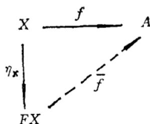
证明 因为集 X 的所有有限子集之族关于集的并运算明显是并半格，于是定义映射

$$\eta_X: X \to FX, \quad x \mapsto \{x\}。$$

若 A 是任意并半格，$f: X \to A$ 是任意映射，则可定义并半格同态

$$\bar{f}: FX \to A$$

为：$\forall S \in FX, \bar{f}(S) = \vee_A\{f(x) \mid x \in S\}$。容易验证 $\bar{f}$ 使图(2.2.2)可交换，并且这样的 $\bar{f}$ 是唯一的。所以，FX 是由 X 生成的自由并半格。



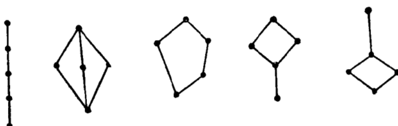
图(2、2、2)

§2.3 格与格同态

(2.3.1)定义 设 $(L, \leqslant)$ 是偏序集，若L关于有限并与有限交都封闭，则称偏序集$(L, \leqslant)$为格，常记作$(L, \vee, \wedge, 0, 1)$，或简记L，这里$0 = \vee\phi$与$1 = \wedge\phi$.

注意 在上述定义中若限定L关于非空有限并与非空有限交封闭，则得通常格定义，即对于偏序集$(L, \leqslant)$，若$\forall a, b \in L$，$a \vee b$与$a \wedge b$都存在，则通常称$(L, \leqslant)$为格.故不同于本书中格定义，在通常格定义中不要求格有最大元与最小元.

(2.3.2)例 有且仅有如下5个5元格：



图(2.3.1)

分别称为5元链、菱形格、5边形格、上扇形格与下扇形格.

(2.3.3)定理 (i)设$(L, \wedge, \vee, 0, 1)$是格，则$(L, \vee, 0)$与$(L, \wedge, 1)$分别是$\vee$-半格与$\wedge$-半格，并且它们在L上诱导出的偏序关系是一致的，即

$$a \vee b = b \Longleftrightarrow a \leqslant b \Longleftrightarrow a \wedge b = a;$$

(ii)设$(L, \vee, 0)$与$(L, \wedge, 1)$分别是$\vee$-半格与$\wedge$-半格，若这两个半格结构在L上诱导出的偏序关系是一致的，即

$a \vee b = b \Longleftrightarrow a \leqslant b \Longleftrightarrow a \wedge b = a$，则$(L, \vee, \wedge, 0, 1)$是格.

证明 直接验证.

(2.3.4)定理 设$(S, \vee, 0)$与$(S, \wedge, 1)$分别是$\vee$-半格与$\wedge$-半格，则$(S, \vee, \wedge, 0, 1)$是格当且仅当吸收律：

$a\wedge(a\vee b)=a$与$a\vee(a\wedge b)=a$成立，其中a，$b\in S$。

证明 设吸收律成立，则当$a\vee b=b$时有$a\wedge b=a\wedge(a\vee b)=a$与当$a\wedge b=a$时有$a\vee b=(a\wedge b)\vee b=b$.这表明两个半格$(S,\vee,0)$与$(S,\wedge,1)$在$S$上诱导出的偏序关系是一致的，故由定理(2.3.3)可知$(S,\vee,\wedge,0,1)$是格。反之，若$(S,\vee,\wedge,0,1)$是格，则易见吸收律成立。

(2.3.5)**定义** 设L_1，L_2都是格，$f:L_1\to L_2$是映射。若f保有限并与保有限交，则称f为格同态。

单满格同态称作格同构。

(2.3.6)**命题** 设L_1，L_2都是格，$f:L_1\to L_2$是映射，则下述条件等价：

(i)f是格同构；

(ii)f是$\vee$-半格同构；

(iii)f是$\wedge$-半格同构；

(iv)f是序同构。

证明 由命题(2.2.5)与命题(2，2，6)即证。

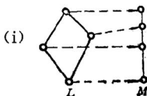
(2．3．7)**命题** 设L_1，L_2都是格，若$f:L_1\to L_2$是格同构，则$f^{-1}:L_2\to L_1$是格同构。

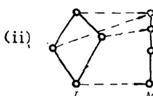
证明 由命题(2.3.6)中(i)与(iv)等价即证。

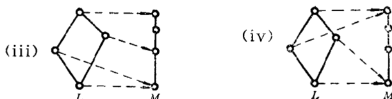
(2.3.8)**例** 如图(2.3.2)所示，(i)—(iv)分别给出了4元格L到4元链M之间的4个映射：

(i)是序同态，但非$\vee$-半格同态，亦非$\wedge$-半格同态；

(ii)是$\vee$-半格同态，但非$\wedge$-半格同态；

(i)


(ii)




图(2.3.2)

(iii)是$\wedge$-半格同态，但非$\vee$-半格同态；

(iv)既是$\vee$-半格同态，又是$\wedge$-半格同态，即是格同态。

(2.3.9)**例** 设L是格，$2=\{0, 1\}$为2元格．若$f:L\to 2$是格同态，则f是满射．

(2.3.10)**定义** 设$(L, \leqslant)$是格，$S\subseteq L$．若S对L中有限并与有限交都封闭，则称S是L的子格．

(2.3.11)**命题** 设L_1, L_2都是格．若$f:L_1\to L_2$是格同态，则$f(L_1)$是L_2的子格．

证明 直接验证．

§2.4 分配格，Boole代数与完备格

(2.4.1)**定义** 设L是格．若对于任意$a, b, c\in L$有下列分配律成立：

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c) \quad (1)$$

或

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c), \quad (2)$$

则称L为分配格．

(2.4.2)**定理** 对于格，在定义(2.4.1)中分配律(1)与(2)等价。

证明 (1)$\Rightarrow$(2)设(1)成立，则

$$
\begin{aligned}
&(a\vee b)\wedge(a\vee c)\\
&=[(a\vee b)\wedge a]\vee[(a\vee b)\wedge c]\\
&=a\vee[((a\vee b)\wedge c]\\
&=a\vee[(a\wedge c)\vee(b\wedge c)]\\
&=[a\vee(a\wedge c)]\vee(b\wedge c)\\
&=a\vee(b\wedge c).
\end{aligned}
$$

所以，（2）成立.

（2）⇒（1）设（1）成立，则

$$
\begin{aligned}
&(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\\
&=[(a\wedge b)\vee a]\wedge[(a\wedge b)\vee c]\\
&=a\wedge[(a\wedge b)\vee c]\\
&=a\wedge[(a\vee c)\wedge(b\vee c)]\\
&=[a\wedge(a\vee c)]\wedge(b\vee c)\\
&=a\wedge(b\vee c).
\end{aligned}
$$

所以，（1）成立.

(2.4.3)**定理**　设D是分配格，则对于a，b，$c\in D$，存在至多一个$x\in D$使得

$$x\wedge a=b \text{ 与 } x\vee a=c.$$

证明　设x，$y\in D$，并且满足题设条件，则

$$
\begin{aligned}
x&=x\wedge(x\vee a)\\
&=x\wedge c\\
&=x\wedge(y\vee a)\\
&=(x\wedge y)\vee(x\wedge a)\\
&=(x\wedge y)\vee b\\
&=x\wedge y
\end{aligned}
$$
(根据$b=x\wedge a=y\wedge a$是$\{x,\ y\}$的下界)，同理可证$y=x\wedge y$。所以$x=y$。

(2．4．4)**定义**　设$(L,\leqslant)$是格，并且x，$y\in L$．若$x\vee y=1$与$x\wedge y=0$,则称x与y互为补元,即x是y的补元,y是x的补元.

补元概念是幂集格中余集概念的推广．格中的元一般未必都

有补元．根据定理(2．4．3)可知，在分配格中，若补元存在，则它必是唯一的．

(2．4．5)**定义** 设$(D, \leqslant)$是分配格，若D的元都有补元，则称分配格$(D, \leqslant)$为Boole代数，或Boole格．

设$(L, \leqslant)$是Boole格，$a \in L$，a的补元记作a'．于是

$$' : L \to L$$

是一元运算．

Boole格之间的格同态是Boole代数同态，即格同态与一元运算,可交换．事实上，设

$$f : L_1 \to L_2$$

是Boole格之间的格同态，则$\forall a \in L_1$，有

$$1 = f(1) = f(a \vee a') = f(a) \vee f(a')$$

与

$$0 = f(0) = f(a \wedge a') = f(a) \wedge f(a').$$

但是 $f(a) \vee (f(a))' = 1$与$f(a) \wedge (f(a))' = 0$,

所以，由定理(2.4.3)知

$$f(a') = (f(a))'.$$

(2.4.6)**定义** 有任意并的偏序集，称作完备$\vee$-半格．有任意交的偏序集，称作完备$\wedge$-半格．有任意并与任意交的偏序集，称作完备格．

显然，有限格、幂集格都是完备格．

(2.4.7)**定理** 设$(P, \leqslant)$是偏序集，则$(P, \leqslant)$是完备$\vee$-半格当且仅当$(P, \leqslant)$是完备$\wedge$-半格．

证明 设偏序集$(P, \leqslant)$是完备$\wedge$-半格．对于$S \subseteq P$,记T为S的全体上界之集，与记$a = \wedge T$．因为$\forall s \in S$，s是T的下界,于是$s \leqslant a$，从而a是S的上界．但是$a = \wedge T$，即a是S的最小上界，所以，$a = \vee S$．这就证明了偏序集$(P, \leqslant)$是完备$\vee$-半格．

用对偶原理可证：若偏序集$(P, \leqslant)$是完备$\vee$-半格，则它必是完备$\wedge$-半格．

(2.4.8) **定理** 完备$\vee$-半格或完备$\wedge$-半格必是完备格。

证明 这是定理(2.4.7)直接推论。

(2.4.9) **定理** 设$(L, \leqslant)$是完备格，S是L的非空子集。若S对L中任意交(或任意并)封闭，则按L中的偏序关系S是完备格。

证明 由定理(2.4.7)即得。

(2.4.10) **注** 虽然在这种情形下，S是完备格，并且继承了L中的偏序。但是S的子集在S中的上确界(或下确界)却不必是在L中的上确界(或下确界)。此时也称S是L的一个$\wedge$-完备子格(或$\wedge$-完备子格)。当S对于L中的任意并和任意交都封闭时，称S是L的子完备格。

注意 完备$\vee$-半格(或完备$\wedge$-半格)同态，即完备$\vee$-半格(或完备$\wedge$-半格)之间保任意并(或保任意交)的映射，因为它未必保任意交(或保任意并)，所以，一般不是完备格同态(即完备格之间保任意并与保任意交的映射)。但是，完备格之间的格同构(即单满格同态)必定是完备格同构(即单满完备格同态)。

§2.5 理想与滤子

(2.5.1) **定义** 设$(P, \leqslant)$是偏序集，$S\subseteq P$。

(i) 若$S\neq\phi$，并且对于S的任意二个元在S中都有上界，即$\forall a,b\in S$，有$c\in S$使得$a\leqslant c$与$b\leqslant c$，则称S是P中上定向集，或定向集；

(ii) 若$S\neq\phi$，并且对于S的任意二个元在S中都有下界，即$\forall a,b\in S$，有$c\in S$使得$c\leqslant a$与$c\leqslant b$，则称S是P中下定向集，或余定向集。

(2.5.2) **定义** 设$(P, \leqslant)$是偏序集。若对于P中任意定向集S，$\vee S(\in P)$都存在，则称偏序集$(P, \leqslant)$有定向并。

对偶地，可以引进余定向交概念。

(2.5.3) **命题** 一个偏序集，若有定向并(或余定向交)与有限

并(或有限交)，则它必有任意并(或任意交)。

证明 设$(P, \leqslant)$是偏序集，$S\subseteq P$。令

$$T=\{\vee F \mid F\subseteq S,\ F\text{是有限集}\}\subseteq P,$$

则T是定向集．于是$\vee T$存在．现在，$\forall a\in P$，则a是T的上界当且仅当a是S的上界．所以，$\vee S=\vee F$，即偏序集$(P,\leqslant)$有任意并．

(2.5.4)**定义** 设$(P, \leqslant)$是偏序集，对于$a\in P$与$S\subseteq P$，规定：

$$\uparrow(a)=\{x\in P \mid a\leqslant x\},$$

$$\downarrow(a)=\{x\in P \mid x\leqslant a\},$$

$$\uparrow(S)=\bigcup\{\uparrow(a) \mid a\in S\},$$

$$\downarrow(S)=\bigcup\{\downarrow(a) \mid a\in S\}.$$

当$S=\uparrow(S)$时，则称S为上集；当$S=\downarrow(S)$时，则称S为下集．

(2.5.5)**定义** 设$(P, \leqslant)$是偏序集，I与F都是P的非空子集．

(i) 若I是定向集与下集，则称I是偏序集$(P, \leqslant)$的理想；

(ii) 若F是余定向集与上集，则称F是偏序集$(P, \leqslant)$的滤子．

注意 根据理想与滤子的定义可知，偏序集的理想与滤子都是非空集，$\vee$-半格的理想是子$\vee$-半格，$\wedge$-半格的滤子是子$\wedge$-半格．

偏序集$(P, \leqslant)$的全体理想作成的集，记作$Idl(P)$；全体滤子作成的集，记作$Fil(P)$。

(2.5.6)例 设$(P, \leqslant)$是偏序集，$a\in P$，则$\downarrow(a)$是偏序集$(P, \leqslant)$的理想，称作由a生成的主理想；$\uparrow(a)$是偏序集$(P,\leqslant)$的滤子，称作由a生成的主滤子。

(2.5.7)**命题** 设$(P, \leqslant)$是$\vee$-半格，则

(i) 若$I\subseteq P$，$0\in I$，则I是理想当且仅当

$$\forall a,\ b\in P,\ a\vee b\in I\Longleftrightarrow a\in I\text{与}b\in I;$$

(ii) P的任意个理想的交仍是理想．

设$(P,\leqslant)$是$\wedge$-半格，则

(i) 若$F\subseteq P$，$1\in F$，则F是滤子当且仅当

$$\forall a,b\in P, a\wedge b\in F\Longleftrightarrow a\in F\text{与}b\in F;$$

(ii) P的任意个滤子的交仍是滤子.

特别地，若$(P,\leqslant)$是格，则$Idl(P)$与$Fil(P)$都是完备格.

证明 直接验证.

设$(P,\leqslant)$是$\vee$-半格(或$\wedge$-半格)，$H\subseteq P$，则P中所有包含H的理想(或滤子)的交集是P的理想(或滤子)，并且是P的包含H的最小理想(或最小滤子)，称作由H生成的P的理想(或滤子).特别地，由单元集$\{a\}\subseteq P$生成的理想(或滤子)，即是主理想$\downarrow(a)$(或主滤子$\uparrow(a)$).

(2.5.8)命题 设A与B都是格.

(i) 若$f:A\to B$是$\vee$-半格同态，则

$$f^{-1}(0)=\{a\in A\mid f(a)=0\}$$

是A的理想;

(ii) 若$f:A\to B$是$\wedge$-半格同态，则

$$f^{-}(1)=\{a\in A\mid f(a)=1\}$$

是A的滤子.

证明 (i)显然，$f^{-1}(0)\neq\phi$，设$x_1,x_2\in f^{-1}(0)$，则由$\vee$-半格同态保有限并可知

$$f(x_1\vee x_2)=f(x_1)\vee f(x_2)=0\vee 0=0.$$

所以，$x_1\vee x_2\in f^{-1}(0)$. 即$f^{-1}(0)$是定向集.

又设$a\in f^{-1}(0)$. 若$x\leqslant a$，则由f保序可知

$$f(x)\leqslant f(a)=0, \text{即} f(x)=0.$$

所以，$x\in f^{-}(0)$，即$f^{-1}(0)$是下集.

综上所证，则知$f^{-1}(0)$是A的理想.

(ii) 同理可证.

§2.6 素理想与素滤子

(2.6.1)定义 设L是格，I与F分别是L的理想与滤子.

(i) 对于L的理想I，若$1 \notin I$，则称I是真理想. 对于L的滤子F，若$0 \notin F$，则称F是真滤子；

(ii) 若L的理想I是真理想，并且$\forall a, b \in L$，当$a \wedge b \in I$时有$a \in I$或$b \in I$，则称I是L的素理想；

(iii) 若L的滤子F是真滤子，并且$\forall a, b \in L$，当$a \vee b \in F$时有$a \in F$或$b \in F$，则称F是L的素滤子；

(iv) 对于L的滤子F，若$\forall S \subseteq L$，当$\bigvee S \in F$时存在$s \in S$使得$s \in F$，则称F为完备素滤子.

显然，完备素滤子是真滤子，对于任意格L，则I是L的素理想当且仅当$L - I$是L的素滤子.

(2.6.2)定理 设L是格，I是L的理想，则下列条件等价：

(i) $L - I$是L的(素)滤子；

(ii) I是L的素理想；

(iii) 存在格同态

$$f: L \to \{0, 1\}$$

使得$f^{-1}(0) = I$；

(iv) 存在格同态

$$f: L \to \{0, 1\}$$

使得$f^{-1}(1) = L - I$.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii) 设$F = L - I$是滤子，于是$1 \in F$，从而$1 \notin I$，但I是理想，故I是真理想. 又设$a, b \in L$使得$a \wedge b \in I$，即$a \wedge b \notin F$. 若$a \notin I$与$b \notin I$，即$a, b \in F$，则由F是滤子可知$a \wedge b \in F$，得出矛盾. 故有$a \in I$或$b \in I$. 所以，I是素理想.

(ii)$\Rightarrow$(iii) $\forall a \in L$，命

$$f(a)=\begin{cases}0 & a\in I,\\ 1 & a\notin I,\end{cases}$$

则由I是素理想容易验证 $f:L\to\{0,\ 1\}$ 是格同态，并且 $f^{-1}(0)=I$。

(iii)⇒(i) 设$f:L\to\{0,\ 1\}$是格同态，并且$I=f^{-1}(0)$，则由例(2.3.9)可知f是满射。于是 $f^{-1}(1)=L-I$。从而由命题(2.5.8)可知$f^{-1}(1)=L-I$是L的滤子。显然，$0\notin L-I$。又设a，$b\in L$使得$a\vee b\in L-I$，即$a\vee b\in f^{-1}(1)$。因为f是格同态，于是得$f(a)\vee f(b)=f(a\vee b)=1$，从而 $f(a)=1$或$f(b)=1$。即$a\in L-I$或者$b\in L-I$。所以，$L-I$是L的素滤子。

(iii)⟺(iv) 是显然的。

(2.6.3)**定义** 设L是格，I是L的理想。若对于L的任意理想J，当$I\subseteq J$时，有$J=I$或$J=L$，则称I是极大理想(在本书中，极大理想常指极大真理想)。

对偶地，可以引入格的极大滤子的概念。在某些场合(尤其是考虑子集格时)极大真滤子也称为超滤。

(2.6.4)**定理** 设L是格，$I\in Idl(L)$，$F\in Fil(L)$，并且$I\cap F=\phi$，则存在$M\in Idl(L)$使得

$$I\subseteq M,\ \ M\cap F=\phi,$$

并且关于此性质M是极大的。即另有$M'\in Idl(L)$也满足$I\subseteq M'$，$M'\cap F=\phi$，则当$M\subseteq M'$时必有$M'=M$。

证明 令

$$P=\{J\in Idl(L)\mid I\subseteq J,\ \ J\cap M=\phi\},$$

则$P\neq\phi$，并且关于集包含关系$\subseteq$是偏序集，易见P中任意链都有上界。所以，由Zorn引理可知P中有极大元M，M即为所求。

(2.6.5)**定理** 设L是分配格，$I\in Idl(L)$，$F\in Fil(L)$。若L的理想I关于$I\cap F=\phi$是极大的，则I是L的素理想。

证明 因为$1\in F$，故I是真理想，任取$a_1,a_2\in L$，并且$a_1\wedge a_2\in I$，令K_i是于I与a_i生成的L的理想，$i=1,2$，则容易验证

$$K_i = \{x \vee (a_i \wedge b) \mid x \in I,\ b \in L\}.$$

若$K_i \cap F \neq \phi$, $i=1, 2$, 则存在$x_1, x_2 \in I$, $b_1, b_2 \in L$使得

$$x_1 \vee (a_1 \wedge b_1) \in F \quad 与 \quad x_2 \vee (a_2 \wedge b_2) \in F.$$

但F是滤子，于是有

$$d = [x_1 \vee (a_1 \wedge b_1)] \wedge [x_2 \vee (a_2 \wedge b_2)] \in F.$$

因为L是分配格，故将上式展开得

$$d = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge a_2 \wedge b_2) \vee (x_2 \wedge a_1 \wedge b_1) \vee (a_1 \wedge a_2 \wedge b_1 \wedge b_2).$$

由于I是理想，括号内的每一项都在I中，从而$d \in I$，于是$I \cap F \neq \phi$，这与题设矛盾．所以，$K_1 \cap F = \phi$或者$K_2 \cap F = \phi$．若$K_1 \cap F = \phi$，则得$a_1 \in I$，若$K_2 \cap F = \phi$，则得$a_2 \in I$．

综上所证，则知I是L的素理想．

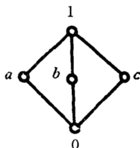
(2.6.6)推论 分配格的极大真理想都是素理想．

证明 设I是分配格L的极大真理想．令

$$F = \{1\} \in Fil(L),$$

则因I是真理想可得$I \cap F = \phi$．于是由I的极大性可知I关于$I \cap F = \phi$也是极大的．所以根据定理(2.6.5)可知I是素理想．

注意 推论(2.6.6)中格的分配性条件是不可缺少的．这由下例即知．设L是5元菱形格，则L不是分配格．令$I = \{0, a\}$，则I是L的极大真理想．因为$b \wedge c = 0 \in I$，又$b, c \notin I$，所以I不是L的素理想(见图(2.6.1))．



图(2.6.1)

(2.6.7)注 根据对偶原理，则定理(2.6.4)，定理(2.6.5)和推论(2.6.6)对于滤子有相应的对偶结论．

(2.6.8)定理 设D是分配格．又设$a, b \in D$，$b \not\leq a$，则存在格同态

$$f: D \to 2 = \{0, 1\}$$

使得$f(a)=0$ 与 $f(b)=1$.

证明 令$I=\downarrow(a)$与$F=\uparrow(b)$，则$I\in Idl(D)$，$F\in Fil(D)$与$I\cap F=\phi$. 于是根据定理(2.6.4))可知存在D的理想M使得

$$I\subseteq M,\quad M\cap F=\phi,$$

并且M关于此性质是极大的，从而由定理(2.6.5)可知M是D的素理想. 所以，从定理(2.6.2)则知存在格同态

$$f:D\to 2$$

使得$f^{-1}(0)=M$. 易见$f(a)=0$与$(b)=1$.

(2.6.9) **定理** (无拓扑的Stone表示定理) 设D是分配格，则存在集X使得D格同构于$P(X)$的一个子格.

证明 令$X=\{g\mid g:D\to 2$为格同态$\}$，定义映射如下：

$$h:D\to P(X)$$
$$a\mapsto\{g\in X\mid g(a)=1\},$$

则易证h是格同态.

设$a,b\in D$，$a\neq b$，则$b\nleq a$或$a\nleq b$. 不妨设$b\nleq a$. 于是由定理(2.6.8)可知存在格同态

$$f:D\to 2$$

使得$f(a)=0$与$f(b)=1$. 这表明$f\notin h(a)$与$f\in h(b)$. 所以$h(a)\neq h(b)$，即h是单射.

综上所述，考虑

$$h:D\to h(D)\subseteq P(X),$$

则$h:D\to h(D)$是格同构使得D格同构于$P(X)$的一个子格.

(2.6.10) **定理** 设A是Boole代数，I是A的理想，则以下条件等价：

(i) I是A的素理想；

(ii) $\forall a\in A$，则a与a'恰有一个在I中；

(iii) I是A的极大真理想.

证明 (i)$\Longrightarrow$(ii) 设I是A的素理想，又设$a\in A$，则$a\wedge a'$

$=0\in I$. 于是由I是素理想可知 a 与 a'至少有一个在I 中. 但是$a\vee a'=1\notin I$, 所以a与a'不能二个都在I中.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 因为$0\in I$, 于是由(ii)知$1=0'\notin I$. 所以, I是A的真理想.

设J是A的理想. 若$I\subseteq J$, $I\neq J$, 任取$a\in J-I$, 则 $a'\in I\subseteq J$. 于是由a, $a'\in J$得$a\vee a'=1\in J$. 所以, $J=A$.

综上所证, 则知 I 是 A 的极大真理想.

(iii)$\Longrightarrow$(i) 即推论(2.6.6).

§2.7 素元与余素元

(2.7.1) **定义** 设L是格, $a\in L$.

(i) 设$a\neq 1$, 若$\forall x,y\in L$, 当$x\wedge y\leqslant a$时, 有$x\leqslant a$或$y\leqslant a$, 则称 a 为 L 的素元;

(ii) 设$a\neq 1$, 若$\forall x$, $y\in L$, 当$x\wedge y=a$时, 有$x=a$或$y=a$, 则称 a 为 L 的交既约元,或称$\wedge$-既约元;

(iii) 设$a\neq 0$, 若$\forall x$, $y\in L$, 当 $a\leqslant x\vee y$ 时, 有 $a\leqslant x$ 或 $y\leqslant a$, 则称 a 为 L 的余素元;

(iv) 设$a\neq 0$, 若$\forall x$, $y\in L$, 当 $x\vee y=a$ 时, 有 $x=a$ 或 $y=a$, 则称 a 为 L 的并既约元, 或称$\vee$-既约元.

(2.7.2) **命题** 设D是分配格, $a\in D$, 则

(i) a 是 D的素元当且仅当a 是 D 的交既约元;

(ii) a 是 D的余素元当且仅当a 是 D 的并既约元.

证明 (i)设 a 是 D 的交既约元. 若$x,y\in D$, $x\wedge y\leqslant a$,则由分配律得

$$a=a\vee(x\wedge y)=(a\vee x)\wedge(a\vee y).$$

于是$a=a\vee x$或$a=a\vee y$. 所以, $x\leqslant a$或$y\leqslant a$, 即a为 D的素元.

反之, 设a是D的素元. 若x, $y\in D$, $x\wedge y=a$, 则 $x\wedge y\leqslant a$. 于是$x\leqslant a$ 或 $y\leqslant a$. 但是由$x\wedge y=a$ 知 $a\leqslant x$与$a\leqslant y$, 所以$x=a$或

$y=a$，即a是D的交既约元。

(ii) 这是(i)的对偶命题。

(2.7.3)**命题** 设L是格，则$Idl(L)$的素元恰是L的素理想。

证明 设I是$Idl(L)$的素元．现证L的理想I是素理想．显然$1\notin I$．又设$a,b\in L$，$a\wedge b\in I$．记

$$J=\downarrow(a),\quad K=\downarrow(b)\in Idl(L),$$

则$J\cap K=\downarrow(a)\cap\downarrow(b)=\downarrow(a\wedge b)\subseteq I$．但是由$I$是$Idl(L)$的素元可知

$$\downarrow(a)\subseteq I \quad 或 \quad \downarrow(b)\subseteq I.$$

所以，$a\in I$或$b\in I$．综上所证，则知I是L的素理想．

反之，设I是L的素理想．显然$I\neq L$．又设J，$K\in Idl(L)$，$J\cap K\subseteq I$．若$K\nsubseteq I$，则存在$a\in K-I$．于是$\forall b\in J$，$a\wedge b\in J\cap K\subseteq I$(根据$J,K$都是下集)，即$a\wedge b\in I$．从而由$I$是$L$的素理想与$a\notin I$可知$b\in I$．所以，$J\subseteq I$．综上所证，则知$I$是$Idl(L)$的素元．

(2.7.4)**推论** 设L是格，$a\in L$，则

(i) a是L的素元当且仅当由a生成的主理想$\downarrow(a)$是素理想；

(ii) a是L的余素元当且仅当由a生成的主滤子$\uparrow(a)$是素滤子．

证明 由命题(2.7.3)等直接得到．

(2.7.5)**命题** 设L是完备格，$E(L)$与$M(L)$分别表示L的全体素元与余素元之集，则

(i) 若$E(L)\neq\phi$，则$E(L)$对余定向交封闭；

(ii) 若$M(L)\neq\phi$，则$M(L)$对定向并封闭．

证明 (i)设$S\subseteq E(L)$是任意余定向集．命$x=\bigwedge S\in L$，显然$x\neq 1$．任取$a,b\in L$，并且$a\wedge b\leqslant x$．若$a\nleqslant x$，$b\nleqslant x$，则存在s_1，$s_2\in S$使得

$$a\nleqslant s_1,\quad b\nleqslant s_2.$$

由于S是余定向集，从而有$s\in S$满足

$$s\leqslant s_1,\quad s\leqslant s_2.$$

因此$a\nleqslant s$，$b\nleqslant s$．但是$s\in E(L)$，所以$a\wedge b\nleqslant s$．这与$a\wedge b\leqslant x\leqslant s$矛盾．故得$a\leqslant x$或者$b\leqslant x$，即$x\in E(L)$．这就证明了$E(L)$对余定向交封闭．

(ii)这是(i)的对偶命题．

§2.8　偏序集上的伴随函子

设A，B都是偏序集，视它们为范畴，则A与B之间的保序映射即是两个范畴之间的函子．因此，第1章中有关概念在偏序集的情形就显得特别简单．

(2.8.1)**定理**　设A，B都是偏序集，$f:A\to B$与$g:B\to A$都是保序映射，则以下条件等价：

(i) $f\dashv g$；

(ii) $\forall a\in A$，$\forall b\in B$，$a\leqslant g(b)\Longleftrightarrow f(a)\leqslant b$；

(iii) $\forall a\in A$，$a\leqslant gf(a)$与$\forall b\in B$，$fg(b)\leqslant b$．

进而，若这三条件之一成立，则$fgf=f$与$gfg=g$．此时，若命

$$A^*=\{a\in A\,|\,a=gf(a)\}\text{与}B^*=\{b\in B\,|\,b=fg(b)\},$$

则$f|A^*:A^*\to B^*$与$g|B^*:B^*\to A^*$都是双射．

证明　由伴随函子定义，定理(1.5.4)和定理(1.5.7)即证．

(2.8.2)**定理**　设A，B都是偏序集．

(i) 设$g:B\to A$是保序映射．若g有左伴随$f:A\to B$(即$f\dashv g$)，则g保B中存在的任意交．反之，若B有任意交，g保任意交，则g有左伴随$f:A\to B$．

(ii) 设$f:A\to B$是保序映射，若f有右伴随$g:B\to A$(即$f\dashv g$)，则f保A中存在的任意并．反之，若A有任意并，f保任意并，则f有右伴随$g:B\to A$．

证明　(i)设保序映射$g:B\to A$有左伴随$f:A\to B$．对于任意

$S\subseteq B$，若$\wedge S$存在，则因$\forall s\in S$，有$\wedge S\leqslant s$，故由g保序性得$g(\wedge S)\leqslant g(s)$．即$g(\wedge S)$是$\{g(s)\mid s\in S\}$的下界．设$a\in A$是$\{g(s)\mid s\in S\}$的任意下界，则$\forall s\in S$有，$a\leqslant g(s)$．但是由$f\dashv g$可知：$\forall s\in S, a\leqslant g(s)$当且仅当$f(a)\leqslant s$．故得$f(a)\leqslant\wedge S$．于是再由$f\dashv g$得$a\leqslant g(\wedge S)$．即$g(\wedge S)$是$\{g(s)\mid s\in S\}$的最大下界．所以$g(\wedge S)=\wedge g(S)$．

反之，设B有任意交，保序映射$g:B\to A$保任意交，则定义映射如下：

$$f: A\to B$$
$$a\mapsto f(a)=\wedge\{y\in B\mid a\leqslant g(y)\}.$$

显然f是保序映射．于是

$\forall a\in A$，由g保任意交，得

$$\begin{aligned} gf(a) &= g(\wedge\{y\in B\mid a\leqslant g(y)\}) \\ &= \wedge\{g(y)\in B\mid a\leqslant g(y)\} \\ &\geqslant a. \end{aligned}$$

即$\forall a\in A$，有$a\leqslant gf(a)$．又

$\forall b\in B$，则

$$\begin{aligned} f(g(b)) &= \wedge\{y\in B\mid g(b)\leqslant g(y)\} \\ &\leqslant b\text{（根据}b\in\{y\in B\mid g(b)\leqslant g(y)\}\text{）}. \end{aligned}$$

即$\forall b\in B$，有$fg(b)\leqslant b$．

综上所证，则由定理(2.8.1)可知$f\dashv g$．

(ii) 对于(ii)中第一部分结论与(i)中第一部分结论是对偶的．对于(ii)中第二部分结论，则可定义映射

$$g: B\to A$$
$$b\mapsto g(b)=\vee\{x\in A\mid f(x)\leqslant b\}.$$

不难证明$f\dashv g$．

(2.8.3) **定理**　设A，B都是完备格，则

(i) 保序映射$f: A\to B$有右伴随$g: B\to A$当且仅当f保任意并；

(ii) 保序映射$g: B\to A$有左伴随$f: A\to B$当且仅当g保任意交.

证明 这是定理(2.8.2)直接推论.

(2.8.4)**命题** 设A是偏序集, $t: A\to A$是保序映射, 则下列条件等价:

(i) t是A上的一个monad;

(ii) $tt=t$, 并且$\forall a\in A$, $a\leqslant t(a)$.

证明 由monad的定义即得.

(2.8.5)**定义** 设A是偏序集, $t: A\to A$是保序映射, 若t满足:

(i) $\forall a\in A$, $a\leqslant t(a)$;

(ii) $tt=t$,

则称t是闭包映射.

(2.8.6)**命题** 设A是偏序集, $t: A\to A$是保序映射, 则t是闭包映射当且仅当存在偏序集B, 以及保序映射$f: A\to B$与$g: B\to A$满足

$$f\dashv g \quad 与 \quad t=gf.$$

证明 由定理(1.7.4)即证.

§2.9 Heyting代数

(2.9.1)**定义** 设L是格. 若对于L的任意元a与b, 存在L的元$(a\to b)$使得$\forall c\in L$, 有

$$c\leqslant(a\to b)\Longleftrightarrow c\wedge a\leqslant b,$$

则称L是Heyting代数.

Heyting代数是作为直觉主义命题逻辑的代数模型而引进的, 所以它可以看作是Boole代数的推广.

(2.9.2)**注** 设L是格, 对于$a\in L$, 有保序映射

$$a\wedge(-): L\to L,$$

则L是Heyting代数当且仅当$\forall a\in L$,

$$a\wedge(-):L\to L$$

有右伴随

$$a\to(-):L\to L.$$

特别地，若L是Heyting 代数，则$\forall a\in L$，映射$a\to(-):L\to L$是保序映射.

(2.9.3) **定理** 设L是格，$\to$是L上二元运算，则$\to$使得L成为Heyting代数当且仅当下列等式成立：

(i) $a\to a=1$;

(ii) $a\wedge(a\to b)=a\wedge b$;

(iii) $b\wedge(a\to b)=b$;

(iv) $a\to(b\wedge c)=(a\to b)\wedge(a\to c)$.

证明 设L是Heyting代数，以下证明定理中列举的四个等式成立.

(i) 设$a\in L$，因为L是 Heyting 代数，故对于L的一对元(a, a)有$(a\to a)\in L$使得$\forall c\in L$,

$$c\leqslant(a\to a)\text{当且仅当}c\wedge a\leqslant a.$$

但是$\forall c\in L$，总有$c\wedge a\leqslant a$. 所以，由$c\leqslant(a\to a)$可知$a\to a=1$.

(ii) 设$a, b\in L$. 因为L是Heyting代数，故对于L的一对元(a, b)有$(a\to b)\in L$使得$\forall c\in L$,

$$c\leqslant(a\to b)\text{当且仅当}c\wedge a\leqslant b.$$

特别地，取$c=(a\to b)$，则由$(a\to b)\leqslant(a\to b)$可知$(a\to b)\wedge a\leqslant b$，但是$(a\to b)\wedge a\leqslant a$，因此得

$$a\wedge(a\to b)\leqslant a\wedge b. \tag{1}$$

根据Heyting代数定义，则由$(a\wedge b)\wedge a\leqslant b$可得$(a\wedge b)\leqslant(a\to b)$. 但是$(a\wedge b)\leqslant a$，从而

$$(a\wedge b)\leqslant a\wedge(a\to b). \tag{2}$$

所以，由(1)与(2)得

$$a\wedge(a\to b)=a\wedge b.$$

(iii) 设a, $b\in L$. 因为L是Heyting代数，于是对于L的一对元(a, b)，由$b\wedge a\leqslant b$可知$b\leqslant a\to b$. 所以，$b\wedge(a\to b)=b$.

(iv) 设a, b, $c\in L$. 因为L是Heyting代数，从而$a\to(-):L\to L$是保序映射，于是得

$$a\to(b\wedge c)\leqslant a\to b$$

与

$$a\to(b\wedge c)\leqslant a\to c.$$

因此，

$$a\to(b\wedge c)\leqslant(a\to b)\wedge(a\to c). \tag{3}$$

但是，

$$\begin{aligned}&(a\to b)\wedge(a\to c)\wedge a\\ &=[a\wedge(a\to b)]\wedge[a\wedge(a\to c)]\\ &=(a\wedge b)\wedge(a\wedge c)\ (\text{根据(ii)式})\\ &\leqslant b\wedge c.\end{aligned}$$

即

$$[(a\to b)\wedge(a\to c)]\wedge a\leqslant b\wedge c.$$

于是由Heyting代数定义得

$$(a\to b)\wedge(a\to c)\leqslant a\to(b\wedge c). \tag{4}$$

所以，由(3)与(4)得

$$(a\to b)\wedge(a\to c)=a\to(b\wedge c).$$

反之，设$\to$是格L上二元运算，并且等式(i)—(iv)成立. 任取$a,b\in L$，则$a\to b\in L$. 若$c\in L$有$c\leqslant(a\to b)$，则由(ii)知

$$c\wedge a\leqslant a\wedge(a\to b)=a\wedge b\leqslant b.$$

又，若$c\in L$有$c\wedge a\leqslant b$，则

$$\begin{aligned}c&=c\wedge(a\to c) &&(\text{根据(iii)式})\\ &\leqslant 1\wedge(a\to c)\\ &=(a\to a)\wedge(a\to c) &&(\text{根据(i)式})\\ &=a\to(a\wedge c) &&(\text{根据(iv)式})\\ &\leqslant a\to b &&(\text{根据(iv)式易证}\ a\to(-):\end{aligned}$$

$L\to L$是保序映射)。

综上所证，则知L是Heyting代数。

(2.9.4) 注 设B是Boole代数，又设$a,b\in B$。考虑B的元$a'\vee b$，则

(i) 对于$c\in B$，若$c\leqslant a'\vee b$，则

$$
\begin{aligned}
c\wedge a &\leqslant a\wedge(a'\vee b)\\
&=(a\wedge a')\vee(a\wedge b)\\
&=0\vee(a\wedge b)\\
&\leqslant b;
\end{aligned}
$$

(ii) 对于$c\in B$，若$c\wedge a\leqslant b$，则

$$
\begin{aligned}
a'\vee b &\geqslant a'\vee(c\wedge a)\\
&=(a'\vee c)\wedge(a'\vee a)\\
&=(a'\vee c)\wedge 1\\
&\geqslant c.
\end{aligned}
$$

综上所证，则知$a'\vee b=a\to b$。所以，Boole代数是Heyting代数。根据以上事实，对于Boole代数B的任意元a，则

$$a'=a\to 0.$$

这表明在Boole代数中可用二元运算→定义一元运算′。

(2.9.5) **定义** 设H是Heyting代数。命

$$\neg a=a\to 0,$$

则称$\neg a$为a的伪补元或否定。

注意：在Heyting代数H中，$\forall a\in H$，有

$$
\begin{aligned}
&a\wedge\neg a\\
&=a\wedge(a\to 0)\\
&=a\wedge 0\text{(根据定理(2.9.3)(ii))}\\
&=0.
\end{aligned}
$$

但是，一般说来，

$$
\begin{aligned}
&a\vee\neg a\\
&=a\vee(a\to 0)
\end{aligned}
$$

$\neq 1$.

(2.9.6) **定理** (i) Heyting代数是分配格.

(ii) Heyting代数H是Boole代数当且仅当$\forall a\in H$有$\urcorner\urcorner a = a$.

证明 (i)设H是Heyting代数，则$\forall a\in H$,

$$a\to(—):\ H\to H$$

是保序映射. 于是$\forall b,c\in H$，有

$$a\to[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)]\geqslant[a\to(a\wedge b)]\vee[a\to(a\vee c)].$$

根据Heyting代数定义，则由$b\wedge a\leqslant(a\wedge b)$得$b\leqslant a\to(a\wedge b)$与由$c\wedge a\leqslant(a\wedge c)$得$c\leqslant a\to(a\wedge c)$. 从而

$$b\vee c\leqslant a\to[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)].$$

再由L是Heyting代数可知

$$(b\vee c)\wedge a\leqslant[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)]. \quad (1)$$

对于格H，则$\forall a\in H$,

$$a\wedge(—):\ H\to H$$

是保序映射，于是$\forall b,c\in H$，有

$$(a\wedge b)\vee(a\vee c)\leqslant a\wedge(b\vee c). \quad (2)$$

综上所证，则由(1)与(2)得

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c),$$

即Heyting代数是分配格.

(ii) 设Heyting代数H是Boole代数. 在Heyting代数H中，$\forall a\in H$，则$\urcorner a=a\to 0$，由注(2.9.4)可知，在Boole代数H中，$\forall a\in H$，有$a'=a\to 0$，从而$a'=\urcorner a$. 但是在Boole代数H中，$\forall x\in H$，有

$$x\wedge x'=0 \quad 与 \quad x\vee x'=1.$$

于是

$$x'\wedge x''=0 \quad 与 \quad x'\vee x''=1.$$

所以，由定理(2.4.3)可知$a''=a$，即$\urcorner\urcorner a=a$.

反之，设H是Heyting代数，并且$\forall a\in H$，有$\rceil\rceil a=a$。因为Heyting代数是分配格，与$a\wedge\rceil a=0$，故为证Heyting代数H是Boole代数，余下只要证：$\forall a\in H$，有$\rceil a\vee a=1$。事实上，从给定条件可知：

$$\rceil:H\to H$$

是双射，并且易见在Heyting代数H中，

$$(-)\to 0:H\to H$$

是逆序映射，因此在H中*De Morgan*定律成立。故从$a\wedge\rceil a=0$可得

$$\rceil a\vee a=1.$$

综上所证，则知满足$\rceil\rceil a=a$的Heyting代数H是Boole代数。

(2.9.7) **注** 在Heyting代数H中，$\forall a\in H$，有$\rceil a=a\to 0$。于是

$$\rceil a\wedge a=a\wedge(a\to 0)=0$$

(根据定理(2.9.3))。因此根据Heyting代数定义可知

$$\rceil a=\bigvee\{x\in H\mid a\wedge x=0\}.$$

由此可以证明在Heyting代数H中，映射

$$\rceil:H\to H$$

是逆序映射。事实上，设$a,b\in H$，并且$a\leqslant b$，若$x\in H$使得$b\wedge x=0$，则$a\wedge x\leqslant b\wedge x=0$，从而

$$\rceil b=\bigvee\{x\in H\mid x\wedge b=0\}$$
$$\leqslant\bigvee\{x\in H\mid x\wedge a=0\}=\rceil a.$$

即$\rceil:H\to H$是逆序映射。

设H是Heyting代数，$a\in H$，$A\subseteq H$，记

$$a\to A=\{x\in H\mid\exists c\in A\text{使得}x=a\to c\},$$

则$a\to A$是A在$a\to(-)$下的象。

(2.9.8) **定理** 设A是Heyting代数，则A是Boole代数当且仅当$\forall a\in A$，$a\to A$是上集。

证明 设A是Boole代数，若$a\in A$，则a有补元b.以下证明

$a \to A = \uparrow(b)$.

$\forall x \in A, a \wedge b = 0 \leqslant x \Longleftrightarrow a \to x \geqslant b$，即$a \to A \subseteq \uparrow(b)$. 反之，设$x \geqslant b$，则有

$$\begin{aligned} a \to (a \wedge x) &= (a \to a) \wedge (a \to x) && \text{(根据定理(2.9.3)(iv))} \\ &= a \to x && \text{(根据定理(2.9.3)(i))} \\ &\geqslant x && \text{(根据定理(2.9.3)(iii)).} \end{aligned}$$

$\forall c \in A$，若$a \to (a \wedge x) \geqslant c$，由于$a \to A \subseteq \uparrow(b)$，则有

$$\begin{aligned} a \wedge c \leqslant a \wedge x \Rightarrow x = x \wedge 1 &= x \wedge (a \vee b) \quad \text{(根据} a \vee b = 1\text{)} \\ &= (x \wedge a) \vee (x \wedge b) \\ &= (x \wedge a) \vee b \qquad \text{(根据} x \geqslant b\text{)} \\ &\geqslant (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\ &= c \wedge (a \vee b) = c. \end{aligned}$$

于是 $x \geqslant a \to (a \wedge x)$，即 $x = a \to (a \wedge x) \in a \to A$. 所以，$a \to A = \uparrow(b)$是上集.

反之，设$\forall a \in A$，$a \to A$是上集. 因为$a \to A$有最小元$\neg a = a \to 0$，故$a \to A = \uparrow(\neg a)$. 由于已有$a \wedge \neg a = 0$，故只需证明$a \vee \neg a = 1$.

由于$a \vee \neg a \geqslant \neg a$，即$a \vee \neg a \in a \to A$，故有$x \in A$使得 $a \to x = a \vee \neg a$. 此外，

$$\begin{aligned} a \wedge x &= a \wedge (a \to x) && \text{(根据定理(2.9.3)(iii))} \\ &= a \wedge (a \vee \neg a) \\ &= (a \wedge a) \vee (a \wedge \neg a) \\ &= a. \end{aligned}$$

即$x \geqslant a$. 从而有

$$a \vee \neg a = a \to x \geqslant a \to a = 1.$$

于是$\neg a$是a的补元. 所以，由定理 (2.9.6)(i) 可知A是Boole代数.

(2.9.9) **推论** 设A是Heyting代数，又设$a, b \in A$，则下列条件等价：

(i) a,b是A中的互补元(即$a\vee b=1, a\wedge b=0$)；

(ii) $\rceil a=b, \rceil b=a$；

(iii) $a\to A=\uparrow(b)$；

(iv) $b\to A=\uparrow(a)$.

证明 由定理(2.9.6)(ii)和定理(2.9.8)的证明过程即证.

(2.9.10) **定理** 设L是完备格，则L是Heyting代数当且仅当L满足无限分配律：$\forall a\in L, \{x_i \mid i\in I\}\subseteq L$,

$$a\wedge(\bigvee_{i\in I}x_i)=\bigvee_{i\in I}(a\wedge x_i).$$

证明 设L是Heyting代数，$a\in L, \{x_i \mid i\in I\}\subseteq L$，由于$a\wedge(-)$有右伴随，故它保任意交(根据定理(2.8.2))，即有

$$a\wedge(\bigvee_{i\in I}x_i)=\bigvee_{i\in I}(a\wedge x_i).$$

反之，若无限分配律成立，则$a\wedge(-)$保任意并，从而有右伴随，所以，L是Heyting代数.

§2.10 完全分配格及其范畴

完全分配格一直是经典格论的重要研究对象. 随着连续格理论的发展,特别是70年代末期,J.D.Lawson和R.E.Hoffmann分别独立地确立了完全分配格与连续偏序集之间的对应关系，以及L-fuzzy拓扑学的创立，使得这个经典论题重新受到重视，获得了极大的发展. 本节将以B,Hutton、王国俊等发展的极小集方法为工具，给出完全分配格的一些重要例子和基本结构定理，建立与完全分配格有关的几个范畴，以及讨论它们之间的几种态射与相互关系.

以下给出在本节使用的一个记号. 设$\{J_i \mid i\in I\}$是一族指标集，令

$\Phi=\{f \mid f: I\to\coprod_{i\in I}J_i$，并且满足$\forall i\in I, f(i)\in J_i\}$，此处$\coprod_{i\in I}J_i$表示集族$\{J_i \mid i\in I\}$的不交并. 集$\Phi$的元通常称为选择函数,

根据选择公理，对于任意非空集族(即$I\neq\phi$)，若 $\forall i\in I, J_i\neq\phi$，则有$\Phi\neq\phi$.

(2.10.1) **定义** 设A是完备格. 若对于A的任意子集族$\{J_i|i\in I\}$，有

$$\wedge\{\vee J_i|i\in I\}=\vee\{\wedge\{f(i)|i\in I\}|f\in\Phi\}, \qquad (CD)$$

则称A是完全分配格.

(2.10.2) **注** (i)通常称等式(CD)为完全分配律，其对偶形式为：对于A的任意子集族$\{J_i|i\in I\}$，有

$$\vee\{\wedge J_i|i\in I\}=\wedge\{\vee\{f(i)|i\in I\}|f\in\Phi\}. \qquad (CD^{op})$$

下面的定理(2.10.7)表明，在完备格中，完全分配律(CD)与其对偶(CD^{op})是等价的.

(ii) 由定义(2.10.1)可以看出，对于完全分配格理论来讲，选择公理是必不可少的. 事实上，选择公理等价于断言：任意集的幂集格是完全分配格.

(iii) 对于完备格A的任意子集族，恒成立不等式：

$$\wedge\{\vee J_i|i\in I\}\geqslant\vee\{\wedge\{f(i)|i\in I\}|f\in\Phi\}.$$

因此欲证A是完全分配格，只需验证另一个方向的不等式即可.

(iv) 若对于$i\in I$，将A的子集J_i的元列出来(用J_i自身作为指标集)：

$$J_i=\{a_{ij}|j\in J_i\}, i\in I,$$

则完全分配律取如下的形式：

$$\bigwedge_{j\in J_i}(\bigvee_{i\in I}a_{ij})=\bigvee_{i\in I}\{\wedge a_{if(i)}|f\in\Phi\}. \qquad (CD')$$

这两种形式将交替使用.

(2.10.3) **例** 对于任意集X，则其幂集格$P(X)$是完全分配格.

(2.10.4) **命题** 任意完备的全序集(即有任意并与任意交的全序集)是完全分配格.

证明 设A是完备的全序集，$\{J_i|i\in I\}$是A的任意子集族，

令

$$x=\wedge\{\vee J_i \mid i\in I\},$$
$$y=\vee\{\wedge\{f(i)\mid i\in I\}\mid f\in\Phi\}.$$

由注(2.10.2)(iii)可知$x\geqslant y$. 假设$x>y$, 即, $x\geqslant y$,但是$x\neq y$. 可以分成两种情形考虑:

(i) 存在$z\in A$, 使得$x>z>y$.

此时, 由于$x=\wedge\{\vee J_i \mid i\in I\}>z$, 从而$\forall i\in I, \vee J_i>z$.因为$A$是全序集, 故可知存在某个$f_0(i)\in J_i$满足$f_0(i)>z$.这样就定义了一个选择函数$f_0\in\Phi$使得$\forall i\in I, f_0(i)>z$, 于是

$$\wedge\{f_0(i)\mid i\in I\}\geqslant z.$$

因此

$$y=\vee\{\wedge\{f(i)\mid i\in I\}\mid f\in\Phi\}\geqslant\wedge\{f_0(i)\mid i\in I\}\geqslant z,$$

这与$z>y$是矛盾的. 所以, 在情形(i)下必有$x=y$.

(ii) 不存在满足$x>z>y$的$z\in A$.

因为$\forall i\in I$,

$$\vee J_i\geqslant\wedge\{\vee J_i \mid i\in I\}=x>y,$$

于是存在$f_0(i)\in J_i$, 使得$f_0(i)>y$(因为A是全序集).从而根据(ii)的假定可知$x\not> f_0(i)$. 因此, 由全序性有$x\leqslant f_0(i)$. 这样就定义了一个选择函数$f_0\in\Phi$使得$\forall i\in I, x\leqslant f_0(i)$与$y<f_0(i)$. 所以,

$$\wedge\{f_0(i)\mid i\in I\}\geqslant x>y=\vee\{\wedge\{f(i)\mid i\in I\}\mid f\in\Phi\},$$

这是不可能的.

综上所证, 则知$x=y$. 所以, 完全分配律(CD) 成立.

(2.10.5) **定理** 设$\{A_r\mid r\in\Gamma\}$是一族完全分配格,则其直积关于逐点序是完全分配格.

证明 设族$\{A_r\mid r\in\Gamma\}$的直积为

$$\prod\{A_r\mid r\in\Gamma\},$$

其元表示为$\{a_r\}_{r\in\Gamma}$, 其中$\forall r\in\Gamma, a_r\in A_r$. 直积中的逐点序规定如下: 对于$\{a_r\}_{r\in\Gamma}, \{b_r\}_{r\in\Gamma}\in\prod A_r$,

$$\{a_r\}_{r\in\Gamma}\leqslant\{b_r\}_{r\in\Gamma}\Longleftrightarrow\forall r\in\Gamma,a_r\leqslant b_r,$$

则可以直接验证$\Pi\{A_r|r\in\Gamma\}$是完备格，并且在其内完全分配律成立．

(2.10.6) **定理** 若A是完全分配格，B是A的子完备格(即：$B\subseteq A$，并且B对于A中的任意交和任意并都封闭)，则B是完全分配格．

证明 显然．

(2.10.7) **例** 根据定理(2.10.4)，则实数单位区间[0,1]关于其自然序是完全分配格．因此，由定理(2.10.5)可知其任意幂$\prod_{r\in\Gamma}[0,1]_r$是完全分配格．所以，[0,1]的任意幂的子完备格也是完全分配格（定理(2.10.6)）．事实上，后面将会看到，这个结论具有普遍意义，即：任意完全分配格都同构于[0,1] 的幂的一个子完备格．

完全分配格的一个重要特征是其“自对偶”性．准确地说，即

(2.10.8) **定理** 设A是完备格，则在A中完全分配律(CD)成立当且仅当其对偶(CD^{op})成立．换言之，A是完全分配格当且仅当其对偶A^{op}是完全分配格．

证明 设$\{J_i|i\in I\}$ 是完备格A的任意子集族，假定完全分配律(CD)成立，要证成立等式(CD^{op})，即

$$\wedge\{\vee\{f(i)\,|\,i\in I\}\,|\,f\in\Phi\}=\vee\{\wedge J_i|i\in I\}.$$

记$J_f=\{f(i)\,|\,i\in I\}$，由完全分配律，则有

$$\wedge\{\vee\{f(i)\,|\,i\in I\}\,|\,f\in\Phi\}=\wedge\{\vee J_f|f\in\Phi\}$$
$$=\vee\{\wedge\{g(f)\,|\,f\in\Phi\}\,|\,g\in G\},$$

其中

$$G=\{g\,|\,g:\Phi\to\coprod_{f\in\Phi}J_f\text{使得}\forall f\in\Phi,g(f)\in J_f\}.$$

假设存在$g\in G$，使得

$$\forall i\in I,J_i\not\subseteq\{g(f)\,|\,f\in\Phi\},$$

则$\forall i\in I$，存在$f_0(i)\in J_i-\{g(f)\mid f\in\Phi\}$，于是得到一个选择函数$f_0\in\Phi$。注意，此时

$$g(f_0)\in J_{f_0}=\{f_0(i)\mid i\in I\}.$$

即，存在$i_0\in I$，使得

$$g(f_0)=f_0(i_0)\in J_{i_0}-\{g(f)\mid f\in\Phi\}.$$

这是一个矛盾．从而，对于任意$g\in G$，存在$i\in I$，使得

$$J_i\subseteq\{g(f)\mid f\in\Phi\}.$$

于是，$\forall g\in G$，

$$\wedge J_i\geqslant\wedge\{g(f)\mid f\in\Phi\},$$

或者写成

$$\wedge J_i\geqslant\vee\{\wedge\{g(f)\mid f\in\Phi\}\mid g\in G\}.$$

所以，

$$\begin{aligned}\vee\{\wedge J_i\mid i\in I\}&\geqslant\vee\{\wedge\{g(f)\mid f\in\Phi\}\mid g\in G\}\\&=\wedge\{\vee\{f(i)\mid i\in I\}\mid f\in\Phi\}.\end{aligned}$$

另一个方向的不等式是明显的．证毕．

(2.10.9) **定义** 以完全分配格为对象，完备格同态(即保任意交、任意并的映射)为态射构成一个范畴，称为完全分配格范畴，并记作CD．显然CD是完备格范畴$CLat$的满子范畴．

有时，与范畴CD相关的另外两个范畴是很有用的．首先说明一下记号．设$f:A\to B$是完备格之间的映射．定义映射$f^*,f_*:B\to A$如下：

$$\forall b\in B,f^*(b)=\vee\{a\in A\mid f(a)\leqslant b\},$$

$$\forall b\in B,f_*(b)=\wedge\{a\in A\mid f(a)\geqslant b\}.$$

(2.10.10) **定义** 设CD^*,CD_*都是范畴，其对象均为完全分配格．对于完全分配格之间的映射$f:A\to B$，f是CD^*中的态射当且仅当f和f^*都保任意并；f是CD_*中的态射当且仅当f和f_*都保任意交．

范畴CD^*即是通常所称为分子格范畴，在格上拓扑学中起着重要的作用．

(2.10.11) **命题**

(i) 范畴CD^*与CD_*等价；

(ii) 范畴CD与CD^*对偶等价；

(iii) 范畴CD与CD_*对偶等价.

证明 所有这三个结论都是等价的. 这里只证(ii).

设$f: A\to B$是CD^*中的态射. 由定理(2.8.2)与(2.8.3), 可知$f^*: B\to A$是完备格同态, 即CD中的态射. 于是 $f\mapsto f^*$ 定义了CD^*到CD中的一个对偶等价.

下面将讨论完全分配格的几个基本结构性质. 采用的方法是近年来所发展起来的极小集（和极大集）方法. 这种方法最初在G.N.Raney的经典文献([108,109]等)中已经开始使用,70年代末期开始由于Fuzzy拓扑学的需要经B.Hutton, 王国俊等人的扩充及发展, 已经成为完全分配格理论中的有力工具之一. 不仅如此,此方法的基本思想可以推广到连续格理论中,得出一系列与完全分配格相平行的结果. 同时,通过极小集结构的深入考虑,自然地引出了关于连续偏序集的J.D.Lawson, R.E.Hoffmann理论, 其论证方法之简单明确足以与这种理论的其它处理相比. 这一节只讨论一般性结构定理,还有部分涉及连续格或Locale理论的内容将在第 4 章中讨论.

(2.10.12) **定义** 设A是完备格.

(i) 设$a\in A, B\subseteq A$. 若$a\leqslant\bigvee B$, 并且$\forall L\subseteq A$, 当$a\leqslant\bigvee L$时, $\forall b\in B$, 存在$x\in L$使得$b\leqslant x$, 则称B是a在A中的一个极小集.

设$a, b\in A$. 若$\forall L\subseteq A$, 当$b\leqslant\bigvee L$时, 存在$x\in L$使得$a\leqslant x$, 则记$a\lhd b$. 对于$a\in A$, 记

$$\Downarrow(a)=\{b\in A\mid b\lhd a\}.$$

设A是完备格, $B\subseteq A$与$a\in A$. 显然, B是a在A中的极小集当且仅当$\bigvee B=a$与$B\subseteq\Downarrow(a)$;

(ii) 对偶地可以定义极大集概念.

(2.10.13) **定理** 设A是完备格，则下列条件等价：

(i) $\forall a\in A$，a有极小集；

(ii) $\forall a\in A$，a有极大集；

(iii) $\forall a\in A, a=\bigvee \Downarrow(a)$；

(iv) A是完全分配格.

证明 (i),(ii),(iii) 的等价性由定义 (2.10.12) 与定理 (2.10.8) 即证.

(i) $\Rightarrow$(iv) 设$\{J_i \mid i\in I\}$是A的任意子集族. 令

$$a=\bigwedge\{\bigvee J_i \mid i\in I\},$$

$$b=\bigvee\{\bigwedge\{f(i)\mid i\in I\}\mid f\in\Phi\},$$

则$\forall i\in I, a\leqslant\bigvee J_i$. 由条件(i)，则$a$有极小集，故可设$B$是$a$的一个极小集. 从而$\forall x\in B$，存在$j=f_0(i)\in J_i$使得$x\leqslant f_0(i)$，于是

$$x\leqslant\bigwedge\{f_0(i)\mid i\in I\}\leqslant\bigvee\{\bigwedge\{f(i)\mid i\in I\}\mid f\in J\Phi\}=b.$$

因为$x\in B$是任意的，所以

$$a\leqslant\bigvee B\leqslant b.$$

即完全分配律成立.

(iv) $\Rightarrow$(i) 设$a\in A$. 显然，A的最小元0有极小集（例如. $\{0\}$是一个），故可以设$a\neq 0$. 令

$$\mathscr{B}=\{J_i\mid i\in I, \bigvee J_i\geqslant a, J_i\subseteq A\},$$

则$\forall i\in I, J_i\neq\phi$，并且$\mathscr{B}\neq\phi$. 记

$$B=\{\bigwedge\{f(i)\mid i\in I\}\mid f\in\Phi\}.$$

下面证明B就是a在A中的一个极小集. 首先由完全分配律，有

$$\bigvee B=\bigvee\{\bigwedge\{f(i)\mid i\in I\}\mid f\in\Phi\}$$

$$=\bigwedge\{\bigvee J_i\mid i\in I\}\geqslant\bigwedge\{a\mid i\in I\}=a.$$

再设$L\subseteq A$满足$a\leqslant\bigvee L$. 由$\mathscr{B}$的定义可知存在$i_0\in I$，使得$L=J_{i_0}$. 任取$b\in B$，则存在$f_0\in\Phi$，使得$b=\bigwedge\{f_0(i)\mid i\in I\}$. 所以，$f_0(i_0)\in J_{i_0}$与$f_0(i_0)\geqslant b$. 这表明$B$是$a$的极小集.

(2.10.14) **注** 由定义(2.10.12)不难看出，若a在A中有极

小集，则a的全体极小集的并也是a的极小集（事实上，该极小集即为$\downarrow(a)$）。本书将按格上拓扑学的习惯，将a的极小集和极大集分别记为$\beta(a)$，$\alpha(a)$．

(2.10.15) 定理(G.N.Raney)　设A是完备格，则A是完全分配格当且仅当以下条件成立：$\forall a,b\in A, a\not\leqslant b$，存在$p,q\in A$使得

(i) $a\not\leqslant p, b\not\geqslant q$；

(ii) $\forall x\in A, x\leqslant p$，或者$x\geqslant q$．

证明　设A是完全分配格，又设$a,b\in A, a\not\leqslant b$，则由定理(2.10.13)可知$a$有极小集，$b$有极大集．设$\alpha(b)$是$b$的一个极大集，$\beta(a)$是$a$的一个极小集，则

$$a=\bigvee\beta(a)\not\leqslant\bigwedge\alpha(b)=b.$$

于是存在$a'\in\beta(a), b'\in\alpha(b)$，使得$a'\not\leqslant b'$．令

$$p=\bigvee(A-\uparrow(a')), q=\bigwedge(A-\downarrow(b')).$$

显然有$a\not\leqslant p, b\not\geqslant q$．若存在$x\in A$，满足$x\not\leqslant p$与$x\not\geqslant q$，则由$p,q$的定义可知必有$a'\leqslant x\leqslant b'$．这与$a'\not\leqslant b'$矛盾．所以，条件(i)，(ii)成立．

反之，设定理中的条件成立．又设$\{J_i\mid i\in I\}$是A的任意子集族，令

$$a=\bigwedge\{\bigvee\{f(i)\mid i\in I\}\mid f\in\Phi\},$$
$$b=\bigvee\{\bigwedge J_i\mid i\in I\}.$$

若$a\not\leqslant b$，则由题设可知存在$p,q\in A$，满足(i)，(ii)．因为

$$\begin{aligned}q\not\leqslant b&\Longrightarrow\forall i\in I, q\not\leqslant\bigwedge J_i\\&\Longrightarrow\forall i\in I,\ 存在f_0\in\Phi,\ 使得f_0(i)\in J_i,\\&\qquad q\not\leqslant f_0(i)\\&\Longrightarrow\forall i\in I,\ 存在f_0\in\Phi, p\geqslant f_0(i)\\&\Longrightarrow 存在f_0\in\Phi,\ 使得p\geqslant\bigvee\{f_0(i)\mid i\in I\},\end{aligned}$$

于是有

$$a=\bigwedge\{\bigvee\{f(i)\mid i\in I\}\mid f\in\Phi\}\leqslant\bigvee\{f_0(i)\mid i\in I\}\leqslant p,$$

这与$a\nleqslant p$矛盾。所以，$a\leqslant b$。即完全分配律成立。证毕。

(2.10.16) 注 G.N.Raney的这个经典结果有多种证明方法。注意，在上述证明中，只在证必要性时用到了极小集和极大集的概念，在第4章中，这个必要性还可以通过拓扑的方法推导出来。见注(4.4.7)。

第3章 Locale与拓扑空间

早在30年代末期，格论的方法就开始用于拓扑空间的研究，例如H.Wallman关于T_1空间紧化问题的研究[131],M.H.Stone对于Boole代数与分配格的表示理论的研究[120,121]等，都颇具有格论的特点。到50年代，这一领域的成果已相当丰富，如参见G.Nöbeling的专著[98].我国数学家关肇直先生的著作[37]对此也有简要的介绍。50年代末期，C.Ehresmann提出一种新的观点，他认为具有某种分配性的格（例如完备Heyting代数）本身就应视为一种广义空间来研究，而不仅仅是使用格论的观点和方法,这样就为一门新的学科——Frame理论或Locale理论的创立奠定了基础.其后,C.H.Dowker、D.Papert(Strauss)、J.R.Isbell、P.T.Johnstone等对Frame理论的发展都作出了很大的贡献，1982年P.T.Johnstone出版了Locale理论的第一部专著[54]。近年来，Frame理论对于数理逻辑、计算机科学、范畴论、拓扑学、代数学与Fuzzy数学等领域的应用与影响日益增加，引起了人们的普遍关注。本章论述Locale理论的基本内容。前五节介绍基本概念；第6节和第7节讨论偏序与拓扑的关系；第8节中证明关于分配格与Boole代数的Stone表示定理；第9节引进Locale理论中一个重要工具——C-理想概念，讨论C-理想表示Frame的方法；然后，在第10节中用这种方法构造Locale范畴中的乘积；最后一节探讨Locale范畴的几个相关范畴，目的在于为Locale理论对于L-fuzzy拓扑学的进一步应用以及建立两者之间的联系提供一些线索。

§ 3.1 Frame与Locale

(3.1.1) **定义** (i) 以满足无限分配律的完备格为对象，以保任意并,有限交的映射为态射所构成的范畴称作Frame范畴,记作Frm. 在Frame范畴中，对象称作frame，态射称作frame同态.

(ii) Frame范畴的对偶范畴称作Locale范畴，记作 Loc. 在Locale范畴中，对象称作locale，态射称作连续映射.

注意 由定理(2.9.10) 可知满足无限分配律的完备格恰是Heyting代数. 因此，若只联系到对象，则frame、locale与完备Heyting代数是完全没有区别的，只有提到态射时它们才是不同的.

(3.1.2) **例** 设X是拓扑空间，$\Omega(X)$ 表示拓扑空间 X 的开集格. 显然，它是满足无限分配律的完备格，故是frame. 又设$f: X \to Y$是从拓扑空间X到拓扑空间Y的连续映射，则

$$f^{-1}: \Omega(Y) \to \Omega(X)$$

是frame同态，这里$\Omega(Y)$表示拓扑空间Y的开集格. 因此,它决定一个locale连续映射

$$\Omega(f) = (f^{-1})^{op}: \Omega(X) \to \Omega(Y).$$

设X是任意拓扑空间，则X上一点x与连续映射$f: 1$ (单点空间)$\to X$是一致的，这里$f(1) = x \in X$. 由此引入以下定义.

(3.1.3) **定义** 设L是locale，则frame同态

$$p: L \to \Omega(1)\ (=2)$$

称作locale L的点. 记

$$ptL = \{p \mid p: L \to 2\ (=\{0,1\})\text{是 frame 同态}\},$$

即 ptL 是locale$L$的全体点之集.

注意 设$p \in ptL$. 因为$p: L \to 2$是frame同态，所以 p 是满射.

(3.1.4) **引理** 设L是locale, $p\in ptL$, 则

(i) $p^{-1}(0)$是L的素主理想;

(ii) $p^{-1}(1)$是L的完备素滤子.

证明 (i)设$p\in ptL$, 则$p:L\to 2$是frame同态. 从而由定理(2.6.2)可知$p^{-1}(0)$是L的素理想. 因为frame同态$p:L\to 2$保任意并, 于是$p(\bigvee p^{-1}(0))=\bigvee(pp^{-1}(0))=0$. 即$\bigvee p^{-1}(0)$是理想$p^{-1}(0)$的最大元. 但理想是下集, 所以

$$p^{-1}(0)=\downarrow(\bigvee p^{-1}(0)).$$

即$p^{-1}(0)$是L的主理想. 综上所证, 则知$p^{-1}(0)$是L的素主理想.

(ii) 由定理(2.6.2) 可知$p^{-1}(1)$是L的素滤子. 设$S\subseteq L$, 并且$\bigvee S\in p^{-1}(1)$.若$\forall s\in S, s\notin p^{-1}(1)$, 则$s\in p^{-1}(0)$. 于是从frame同态$p:L\to 2$的保并性可知$p(\bigvee S)=\bigvee p(S)=0$.故有$\bigvee S\in p^{-1}(0)$. 这与上述假设矛盾. 所以, 存在$s\in S$使得$s\in p^{-1}(1)$. 综上所证, 则知$p^{-1}(1)$是$L$的完备素滤子.

(3.1.5) **定理** 设L是locale, pt^0L表示L的全体素元之集, $pt^\vee L$表示L的全体完备素滤子之集, 则

(i) $\forall p\in ptL$, 命$\sigma(p)=\bigvee p^{-1}(0)$, 则

$$\sigma: ptL\to pt^0L$$

是双射;

(ii) $\forall p\in ptL$, 命$\omega(p)=p^{-1}(1)$, 则

$$\omega: ptL\to pt^\vee L$$

是双射.

证明 (i)设$p\in ptL$, 则根据定理(3.1.4)可知$p^{-1}(0)$是L的素主理想. 所以, 由定理(2.7.4)可知$\sigma(p)=\bigvee p^{-1}(0)$是$L$的素元, 即$\sigma(p)\in pt^0L$. 这表明$\sigma: ptL\to pt^0L$是映射.

对于$a\in pt^0L$, 则由定理(2.7.4)可知$\downarrow(a)$是L的素理想. 于是根据定理(2.6.2)存在格同态$p_a:L\to 2$, 使得$p_a^{-1}(0)=\downarrow(a)$. 易见$p_a$是frame同态, 即$p_a\in ptL$. 定义映射

$$\tau: pt^0 L \to ptL$$

使得$\forall a \in pt^0 L, \tau(a) = p_a$。容易验证：

$$\tau\sigma = id_{PtL} 与 \sigma\tau = id_{Pt^0 L}.$$

所以，σ是双射。

(ii) 设$p \in ptL$，则根据定理(3.1.4)可知$p^{-1}(1)$是L的完备素滤子，即$\omega(p) = p^{-1}(1) \in pt^{\nabla} L$。这表明$\omega: ptL \to pt^{\nabla} L$是映射。

对于$F \in pt^{\nabla} L$，则由定理(2.6.2)可知存在格同态$p_F: L \to 2$使得$p_F^{-1}(1) = F$。根据F是完备素滤子，则易见p_F是frame同态，即$p_F \in ptL$。定义映射

$$\theta: pt^{\nabla} L \to ptL$$

使得$\forall F \in pt^{\nabla} L, \theta(F) = p_F$。容易验证：

$$\theta\omega = id_{PtL} \quad 与 \quad \omega\theta = id_{Pt^{\nabla} L}.$$

所以，ω是双射。

(3·1·6) **定理** 设L是locale，则

(i) $\forall x \in L$，命

$$\Phi(x) = \{p \in ptL \mid p(x) = 1\},$$

则Φ: $L \longrightarrow P(ptL)$是frame同态；

(ii) Φ象$= \{\Phi(x) \mid x \in L\}$是$ptL$上拓扑，记作$\Omega(ptL)$。

证明 (i) 设$p \in ptL$，$S \subseteq L$。若$S = \phi$，则

$$\begin{aligned}\Phi(\bigvee\phi) &= \Phi(o) \\ &= \phi \\ &= \bigcup\Phi(\phi).\end{aligned}$$

若$S \neq \phi$，则

$$\begin{aligned}&p \in \bigcup\{\Phi(a) \mid a \in S\} \\ &\Longleftrightarrow 存在 a \in S 使得 p(a) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \bigvee\{p(a) \mid a \in S\} = 1 \\ &\Longleftrightarrow p(\bigvee S) = 1 \ (根据 p 保任意并) \\ &\Longleftrightarrow p \in \Phi(\bigvee S).\end{aligned}$$

即$\Phi(\bigvee S)=\bigcup\Phi(S)$. 综上所证，则知$\Phi$保任意并.

设$p\in ptL$，又设a，$b\in L$，则

$$
\begin{aligned}
& p\in\Phi(a\wedge b)\\
& \Longleftrightarrow p(a\wedge b)=1\\
& \Longleftrightarrow p(a)\wedge p(b)=1\ (\text{根据}p\text{保有限交})\\
& \Longleftrightarrow p(a)=1\text{与}p(b)=1\\
& \Longleftrightarrow p\in\Phi(a)\text{与}p\in\Phi(b)\\
& \Longleftrightarrow p\in\Phi(a)\cap\Phi(b).
\end{aligned}
$$

又
$$
\begin{aligned}
\Phi(\wedge\phi) &= \Phi(1)\\
&= ptL\\
&= \bigcap\phi\\
&= \bigcap\Phi(\phi).
\end{aligned}
$$

综上所证，则知Φ保有限交.

所以，Φ：$L\to P(ptL)$是frame同态.

(ii)是(i)的直接推论.

根据定理(3·1·6)，则对于locale L，有frame同态

$$
\begin{aligned}
\Phi:\ & L\longrightarrow P(ptL)\\
& x\longmapsto\Phi(x)=\{p\in ptL\mid p(x)=1\}.
\end{aligned}
$$

所以，由定理(3·1·5)可得frame同态

$$
\begin{aligned}
\Phi^\circ:\ & L\longrightarrow P(pt^\circ L)\\
& x\longmapsto\Phi^\circ(x)=\sigma(\Phi(x))
\end{aligned}
$$

与

$$
\begin{aligned}
\Phi^\nabla:\ & L\longrightarrow P(pt^\nabla L)\\
& x\longmapsto\Phi^\nabla(x)=\omega(\Phi(x)).
\end{aligned}
$$

(3·1·7)定理 设L是locale，记

$$\Omega(pt^\circ L)=\{\Phi^\circ(x)\mid x\in L\}$$

与

$$\Omega(pt^\nabla L)=\{\Phi^\nabla(x)\mid x\in L\},$$

则

(i) σ: $(ptL, \Omega(ptL)) \longrightarrow (pt^{\circ}L, \Omega(pt^{\circ}L))$

是同胚映射；

(ii) ω: $(ptL, \Omega(ptL)) \longrightarrow (pt^{\nabla}L, \Omega(pt^{\nabla}L))$

是同胚映射。

证明 由定理(3·1·5)与定理(3·1·6)即证。

注意 对于locale L，今后常将$ptL, pt^{\circ}L$与$pt^{\nabla}L$视为等同的拓扑空间，带有拓扑$\Omega(ptL)$。

(3·1·8) **定理** 设L是locale，Φ°: $L \to P(pt^{\circ}L)$与Φ^{∇}: $L \to P(pt^{\nabla}L)$分别是上述定义的映射，则

(i) $\forall x \in L$, $\Phi^{\circ}(x) = \{a \in pt^{\circ}L \mid x \not\leqslant a\}$；

(ii) $\forall x \in L$, $\Phi^{\nabla}(x) = \{F \in pt^{\nabla}L \mid x \in F\}$。

证明 (i)对于$p \in ptL$，则

$p(x) = 1 \Longleftrightarrow x \notin p^{-1}(o)$

$\Longleftrightarrow x \not\leqslant \bigvee p^{-1}(o)$ (根据$p^{-1}(o)$是下集)。

于是$a \in \Phi^{\circ}(x) \Longleftrightarrow$存在$p \in ptL$使得$a = \sigma(p)$与$p(x) = 1$

(根据$\Phi^{\circ}(x) = \sigma(\Phi(x))$)

$\Longleftrightarrow$存在$p \in ptL$使得$a = \bigvee p^{-1}(o)$与$x \not\leqslant \bigvee p^{-1}(o)$

$\Longleftrightarrow a \in pt^{\circ}L$与$x \not\leqslant a$。

所以，$\Phi^{\circ}(x) = \{a \in pt^{\circ}L \mid x \not\leqslant a\}$。

(ii)因为

$F \in \Phi^{\nabla}(x) \Longleftrightarrow$存在$p \in ptL$使得$F = p^{-1}(1)$与$p(x) = 1$

$\Longleftrightarrow$存在$p \in ptL$使得$F = p^{-1}(1)$与$x \in p^{-1}(1)$

$\Longleftrightarrow x \in F$。

所以，$\Phi^{\nabla}(x) = \{F \in pt^{\nabla}L \mid x \in F\}$。

(3.1.9) **命题** 设A, B都是locale，$f: A \to B$是locale连续映射，$\forall p \in ptA$，命

$$ptf(p) = pf^*,$$

则

$$ptf: (ptA, \Omega ptA) \to (ptB, \Omega ptB)$$

是连续映射，这里$f^*: B\to A$表示对应于locale连续映射$f: A\to B$的frame同态。

证明 因为$\Omega ptB=\{\Phi(b)\mid b\in B\}$，从而$\forall p\in ptA$，有

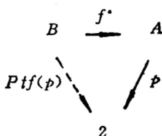
$p\in(ptf)^{-1}(\Phi(b))$

$\Longleftrightarrow (ptf)(p)\in\Phi(b)$

$\Longleftrightarrow pf^*\in\Phi(b)$

$\Longleftrightarrow pf^*(b)=1$

$\Longleftrightarrow p\in\Phi(f^*(b))$。



图(3.1.1)

于是，$(ptf)^{-1}(\Phi(b))=\Phi(f^*(b))$。但是$f^*(b)\in A$，故得$\Phi(f^*(b))\in\Omega ptA$。即

$$(ptf)^{-1}(\Phi(b))\in\Omega ptA.$$

这表明$ptf: ptA\to ptB$反射开集。所以，ptf是连续映射

对于拓扑空间范畴$\boldsymbol{Sp}$中对象，即拓扑空间$(X,\ \Omega(x))$，则其拓扑$\Omega(X)$为locale范畴$\boldsymbol{Loc}$中对象。对于$\boldsymbol{Sp}$中态射，即拓扑空间之间的连续映射f：$(x,\ \Omega(X))\to(Y,\ \Omega(Y))$，则

$$\Omega f=(f^{-1})^{op}:\ \Omega(X)\to\Omega(Y)$$

为$\boldsymbol{Loc}$中态射，即locale连续映射。所以有函子

$$\Omega:\ \boldsymbol{Sp}\to\boldsymbol{Loc}.$$

对于Locale范畴$\mathbf{Loc}$中对象，即locale$A$，则拓扑空间$(ptA,\ \Omega ptA)$为拓扑空间范畴$\boldsymbol{Sp}$中对象。对于$\boldsymbol{Loc}$中态射，即lcale连续映射f：$A\to B$，则由命题(3.1.9)可知

$$ptf:\ (ptA,\ \Omega ptA)\to(ptB,\ \Omega ptB)$$

是拓扑空间之间的连续映射，即为$\boldsymbol{Sp}$中态射。所以有函子

$$pt:\ \boldsymbol{Loc}\to\boldsymbol{Sp}.$$

(3.1.10)定理 对于函子

Ω：$\boldsymbol{Sp}\to\boldsymbol{Loc}$与$pt$：$\mathbf{Loc}\to\boldsymbol{Sp}$，则$\Omega\dashv pt$。

证明 根据定理(1.5.6)只需证明：对于$\boldsymbol{Loc}$中对象B与$\boldsymbol{Sp}$中对象ptB，则存在$\boldsymbol{Loc}$中态射

$$\varepsilon_B: \Omega ptB \to B$$

使得$\forall g \in Hom(\Omega(X), B)$，存在$Sp$中唯一态射

$$f: X \to ptB$$

满足：$g = \varepsilon_B(\Omega f)$.

事实上，定义locale连续映射

$$\varepsilon_B = \Phi^{op}: \Omega ptB \to B,$$

与$\forall x \in X$，定义映射

$$x: 1(\text{单点空间}) \longrightarrow X$$

$$1 \longmapsto x \in X,$$

则$\Omega(x): \Omega(1) \to \Omega(X)$是locale连续映射. 由此定义映射

$$f: X \longrightarrow ptB$$

$$x \longmapsto f_x = g(\Omega(x)).$$

$2=\Omega(1)$ ⇄ $\Omega(X)^*$（上箭头 $\Omega(x)$，下箭头 $\Omega(x)$）；f_x, $(f_x)^*$, g^*, g；B

(图3.1.2)

因为$\Omega ptB = \{\Phi(b) \mid b \in B\}$，于是$\forall b \in B$，有

$$\begin{aligned} f^{-1}(\Phi(b)) &= \{x \in X \mid (f_x)^* = \Omega(x)^* g^* \in \Phi(b)\} \\ &= \{x \in X \mid \Omega(x)^* g^*(b) = 1\} \\ &= \{x \in X \mid x \in g^*(b)\} \\ &= g^*(b). \end{aligned}$$

这表明f反射开集，即f是拓扑空间之间的连 续映射，并且 由以上得

$$g^*(b) = f^{-1}(\Phi(b))$$

$$= (\Omega f)^{op}\Phi(b)$$
$$= ((\Omega f)^{op}\Phi)(b).$$

即

$$g^* = (\Omega f)^{op}\Phi.$$

所以，$g = \Phi^{op}(\Omega f) = \varepsilon_B(\Omega f)$，并且易见由上述等式决定的$f$是唯一的。

§3.2 子Locale

(3.2.1) **定义** 设L是locale，又设

$$j: L \to L$$

是映射．若满足下述条件：$\forall a, b \in L$,

(i) $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$;

(ii) $j(a) \geqslant a$;

(iii) $j(j(a)) \leqslant j(a)$,

则称j为L上核．令

$$L_j = \{x \in L \mid j(x) = x\},$$

则称L_j为L的子locale．

注意 设L是frame, $A \subseteq L$．若A对L中的有限交与任意并都封闭，则称A为frame$L$的子frame．但是locale的子locale则对应于一个商frame．

(3.2.2) **注** 设L是locale，j: $L \to L$是L上核，则子locale $L_j = j(L)$（即j象）．事实上，任取$b \in j(L)$，则存在$a \in L$使得

$$j(a) = b.$$

但是$jj(a) = j(a) = b$，从而

$$b = j(a) \in L_j,$$

故$j(L) \subseteq L_j$．反之，易见$L_j \subseteq j(L)$．综上所证，则知$L_j = j(L)$．

(3.2.3) **例** 设L_1，L_2都是locale，$f: L_2 \to L_1$是locale连续映射，$f^*: L_1 \to L_2$是相应的frame同态．又设$f_*: L_2 \to L_1$是

f^*的右伴随（即$f^* \dashv f_*$）。令

$$j = f_* f^* : L_1 \to L_1,$$

则易证$j = f_* f^*$是L_1上核，并且称$j = f_* f^*$为由f诱导的L_1上核。

(3.2.4) **定理** 设L是locale，$j: L \to L$是L上核，则

(i) L的子locale L_j是frame；

(ii) $j: L \to L_j$是frame同态，並且它是包含映射$i: L_j \to L$的左伴随，即$j \dashv i$。

证明

(i) 因为$j: L \to L$是L上核，故知j与$\wedge$可交换。即$\forall a, b \in L_j$，有

$$j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b) = a \wedge b$$

与

$$j(1) = 1.$$

这表明L_j有有限交，并且L_j中交运算与L中交运算是一致的。

因为$j: L \to L$是L上核，所以$j: L \to L_j$保有限交。

任取$S \subseteq L_j$，则$\bigvee_L S \in L$。所以，由j保序性（根据j保有限交）易证：S在L_j中的上确界

$$\bigvee_{L_j} S = j(\bigvee_L S).$$

这表明L_j有任意并。

任取$S \subseteq L$，则$j(S) \subseteq L_j$。所以，

$$\begin{aligned}\bigvee_{L_j} j(S) &= j(\bigvee_L j(S)) \\ &= j(\bigvee_L \{j(s) \mid s \in S\}) \\ &\geqslant j(\bigvee_L \{s \mid s \in S\}) \text{（根据} j(s) \geqslant s\text{）} \\ &= j(\bigvee_L S).\end{aligned}$$

反之，$\forall s \in S$，有$s \leqslant \bigvee_L S$。于是从j保序性可知，$\forall s \in S$有$j(s) \leqslant j(\bigvee_L S)$。所以

$$\bigvee_{L_j} \{j(s) \mid s \in S\} \leqslant j(\bigvee_L S).$$

综上所证，则知

$$j(\bigvee_L S)=\bigvee_{L_j} j(S).$$

即$j: L\to L_j$保任意并。

对于完备格L，$L_j\subseteq L$，则由上述可知L_j对任意并封闭。所以，由定理(2.4.8)可知依L中的偏序关系L_j是完备格。

设$a\in L_j$，$S\subseteq L_j$，则

$$\begin{aligned}
&a\wedge\bigvee_{L_j}S\\
&=a\wedge j(\bigvee_L S)\\
&=j(a)\wedge j(\bigvee_L S)\ (\text{根据}a\in L_j)\\
&=j(a\wedge\bigvee_L S)\ (\text{根据}j\text{保有限交})\\
&=j(\bigvee_L\{a\wedge S\mid s\in S\})\ (\text{根据}L\text{是frame})\\
&=\bigvee_{L_j}\{a\wedge s\mid s\in S\}.
\end{aligned}$$

所以，L_j满足无限分配律。

(ii) 设$j: L\to L_j$是L上核，又设$i: L_j\to L$是包含映射，则$\forall a\in L$，有$ij(a)=j(a)\geqslant a$，与$\forall b\in L_j$，有$ji(b)=j(b)=b\leqslant b$。所以，根据定理(2.8.1)可知$j\dashv i$。

注意 设L_j是locale$L$的子locale，一般说来，$0_L\neq 0_{L_j}$。所以，L_j未必是L的子格。

(3.2.5)例

(i)设L是locale，$a\in L$，则映射

$$C(a)=a\vee(-): L\to L$$

是L上核。它对应的L的子locale是

$$L_{c(a)}=\uparrow(a).$$

形如这种形式的L的子locale称作闭的。

若令$L=\Omega(X)$，其中X为拓扑空间，任取定开集$K\in\Omega(X)$，则映射

$$C(K)=K\vee(-):\Omega(X)\longrightarrow\Omega(X)$$
$$G\longmapsto K\cup G.$$

又设$i: X-K\longrightarrow X$为包含映射，则

$$i^{-1} = i^*: \Omega(X) \longrightarrow \Omega(X-K)$$
$$G \longmapsto G-K.$$

所以，

$$\begin{aligned} j(G) &= i_* i^*(G) \\ &= i_*(G-K) \\ &= \bigcup\{W \in \Omega(X) \mid i^*(W) \subseteq G-K\} \\ &\qquad (根据定理(2.8.2)(ii)) \\ &= \bigcup\{W \in \Omega(X) \mid W-K \subseteq G-K\} \\ &= G \cup K \\ &= C(K)(G). \end{aligned}$$

即$\Omega(X)$上核$C(K)$是由包含映射i诱导的。

(ii) 设L是locale，$a \in L$，则可以证明

$$u(a) = a \to (-): L \to L$$

是L上核，它对应的L的子locale $L_{u(a)}$同构于$\downarrow(a)$。形如这种形式的L的子locale称作开的。

(3.2.6) **定义** 设L是locale，$j: L \to L$是L上核。若L的子locale L_j是L的子格(即L_j还对L中有限并运算封闭)，则称L的子locale L_j是平坦的。

(3.2.7) **定义** 设L是locale，$j: L \to L$是L上核，并且L_j是L的子locale。若o(即L中最小元)$\in L_j$，即$j(o)=o$，则称L_j在L中是稠密的。

(3.2.8) **例** 设X是拓扑空间，$D \subseteq X$，又设$i: D \to X$是子空间包含映射。记

$$j = i_* i^*: \Omega(X) \to \Omega(X),$$

其中$i^* = i^{-1}: \Omega(X) \to \Omega(D)$，并且$i^* \dashv i_*$，则

$$\begin{aligned} & j(\phi) \\ &= i_* i^*(\phi) \\ &= i_*(\phi) \\ &= \bigcup\{G \in \Omega(X) \mid i^*(G) \subseteq \phi\} \end{aligned}$$

$$= \bigcup\{G\in\Omega(X)\mid G\cap D=\phi\}.$$

所以，$j(\phi)=\phi$当且仅当D在拓扑空间X中是稠密的。

(3.2.9)**命题** 设L是任意locale，则L有一个最小稠密子locale $L_j=\{\neg\neg a\mid a\in L\}$，其中$\neg$是Heyting代数上伪补运算，并且$j=\neg\neg$。

证明 (略)

(3.2.10)**定理** 设A是locale，则A上核与A在范畴$\mathbf{Loc}$中子对象是一一对应的。

证明 设$f: B\to A$是$\mathbf{Loc}$中单态射。容易看到，$f_*f^*: A\to A$是A上核，于是$f_*f^*: A\to A_{f_*f^*}$是frame满同态。这给出了$\mathbf{Loc}$中一个单态射$(f_*f^*)^{op}: A_{f_*f^*}\to A$，以下证明，在$\mathbf{Loc}$中，有$f_*f^*\equiv f$(参看定义(1.1.21))。

因为$f^*\dashv f_*$，根据伴随的性质，则$f^*f_*f^*=f^*$。又$f^*: A\to B$是满态射，故$f^*f_*=id_B$。这表明f_*是单射。注意到f_*f^*与f_*有相同的象，从而f_*的象是$A_{f_*f^*}$。于是映射$f_*: B\to A_{f_*f^*}$是双射。所以，它是frame同构。由此易见，在$\mathbf{Loc}$中，$(f_*f_*)^{op}\equiv f$。

若$f: B\to A$与$g: C\to A$都是$\mathbf{Loc}$中单态射，并且$f\equiv g$，则f^*与g^*有相同的象，于是，由上述证明易见$A_{f_*f^*}=B_{f_*f^*}$。因为f_*f^*与g_*g^*都是A上核，从而由定理(3.2.4)可知f_*f^*和g_*g^*都是包含映射$A_{f_*f^*}=A_{g_*g^*}\to A$的左伴随。所以，$f_*f^*=g_*g^*$。这表明$A$在$\mathbf{Loc}$中的每个子对象对应着$A$上一个核。反之，若$j: A\to A$是$A$上核，则由定理(3.2.4)可知$j: A\to A_j$是frame满同态，于是这给出了$\mathbf{Loc}$中单态射$A_j\to A$。由此可知，$A$上的每个核$j: A\to A$对应着$A$在$\mathbf{Loc}$中一个子对象(即单态射$A_j\to A$的$\equiv$等价类)。容易验证，上述对应给出了$A$上的全体核之族到$A$在$\mathbf{Loc}$中的全体子对象之族之间的一一对应。

(3.2.11)**注** 定理(3.2.10)表明子locale的定义是合理的。

§ 3.3 空间式Locale

设L是locale，则拓扑空间ptL，$pt^{\circ}L$与$pt^{\triangledown}L$彼此两两同胚，今后将视方便而定交替使用它们．对于locale$L$，则

$$\Phi: L \longrightarrow P(ptL)$$

$$a \longmapsto \Phi(a) = \{p \in ptL \mid p(a) = 1\}$$

是$frame$同态。特别地，

$$\Phi: L \longrightarrow \Omega(ptL)$$

是满射，但是一般不是locale同构。因此引入下述定义。

(3.3.1) **定义** 设L是locale。若frame同态

$$\phi: L \longrightarrow \Omega(ptL)$$

是单射(从而是格同构)，则称locale L是空间式的，或称locale L有足够多的点。

(3.3.2) **定理** 设L是locale，则下列条件等价：

(i) locale L是空间式的；

(ii) $\forall a, b \in L, a \nleqslant b$,则存在$p \in ptL$使得$p(a) = 1$与$p(b) = 0$；

(iii) $\forall a, b \in L, a \nleqslant b$,则存在$x \in pt^{\circ}L$,使得$a \nleqslant x, b \leqslant x$；

(iv) $\forall a \in L$，则a是L的素元之交，即a可以表成$pt^{\circ}L$的元之交。

证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 设 locale L是空间式的。若$a, b \in L$，$a \nleqslant b$，则由L是空间式的可知

$$\Phi: L \longrightarrow \Omega(ptL)$$

是双射，于是由$a \nleqslant b$得$\Phi(a) \nsubseteq \Phi(b)$。所以，存在$p \in ptL$使得$p \in \Phi(a)$与$p \notin \Phi(b)$。即得

$$p(a) = 1 \text{ 与 } p(b) = 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) 设a，$b \in L$，$a \nleqslant b$，则根据(ii)可知存在$p \in ptL$，即frame同态p：$L \longrightarrow 2$ 使得

$$p(a) = 1 \text{ 与 } p(b) = 0.$$

但是从定理(3.1.5)可知

$$\sigma: ptL \longrightarrow pt^{\circ}L$$

是双射,并且$\sigma(p)=\bigvee p^{-1}(0)$.令$x=\bigvee p^{-1}(0)$,则$p^{-1}(0)=\downarrow(x)$.于是从$p(a)=1$与$p(b)=0$分别可得$a\notin p^{-1}(0)$与$b\in p^{-1}(0)$.所以

$$a\nleqslant x \quad 与 \quad b\leqslant x.$$

(iii) $\Longrightarrow$(i) 设a, $b\in L$, $a\neq b$. 不妨设$a\nleqslant b$, 则由(iii)可知存在$x\in pt^{\circ}L$使得$a\nleqslant x$与$b\geqslant x$. 根据定理 (3.1.5), 令$p=\sigma^{-1}(x)\in ptL$, 则

$$p^{-1}(o)=\downarrow(x).$$

于是从$a\nleqslant x$ 与 $b\leqslant x$ 分别得$a\notin p^{-1}(o)$与$b\in p^{-1}(o)$.即$p(a)=1$与$p(b)=0$. 这表明

$$p\in\Phi(a) \quad 与 \quad p\notin\Phi(b).$$

即得$\Phi(a)\neq\Phi(b)$. 所以, $\Phi: L\longrightarrow\Omega(ptL)$是单射, 即$L$是空间式的.

(iii) $\Longrightarrow$(iv) 设$a\in L$. 令

$$a^*=\bigwedge\{x\in pt^{\circ}L \mid a\leqslant x\},$$

则$a\leqslant a^*$. 若$a\neq a^*$, 则$a^*\nleqslant a$. 于是根据(iii)存在$x\in pt^{\circ}L$使得

$$a^*\nleqslant x \quad 与 \quad a\leqslant x.$$

从而由$x\in pt^{\circ}L$与$a\leqslant x$可知$a^*\leqslant x$, 得出矛盾. 所以, $a=a^*$, 即L的元都是L的某些素元之交.

(iv) $\Longrightarrow$(iii) 设a, $b\in L$, $a\nleqslant b$, 则根据(iv)可知b可以表为L的素元之交, 即

$$b=\bigwedge B,$$

这里B是L的某些素元之集. 于是存在$x\in B\subseteq pt^{\circ}L$ 使得$a\nleqslant x$(否则. $\forall x\in B$, 有$a\leqslant x$, 于是$a\leqslant\bigwedge B=b$, 这与$a\nleqslant b$矛盾) 与$x\geqslant b$. 所以(iii)成立.

(3.3.3) **例** 设X为拓扑空间, 则locale $\Omega(X)$是空间式的.

证明 $\forall x \in X$，定义映射

$$x: 1\ (\text{单点空间}) \longrightarrow X$$
$$1 \longmapsto x \in X,$$

则$\Omega(x): 2 \longrightarrow \Omega(X)$是locale连续映射，故$p_x = \Omega(x)^{op}: \Omega(X) \longrightarrow 2$ 是frame同态。

任取G，$K \in \Omega(X)$，$G \neq K$。不妨设$G \not\leqslant K$。于是存在 $x \in G$ 与$x \notin K$。故得

$$p_x(G) = 1 \quad 与 \quad p_x(K) = 0.$$

所以，$p_x \in \Phi(G)$ 与$p_x \notin \Phi(K)$，即$\Phi(G) \neq \Phi(K)$。这表明Φ：$\Omega(X) \longrightarrow \Omega pt\Omega(X)$ 是单射。即拓扑空间X的开集格 $\Omega(X)$作为locale是空间式的。

(3.3.4) **命题** 设A，B都是 locale，$f: A \longrightarrow B$ 与 $g: B \longrightarrow A$都是保序映射，并且$f \dashv g$。若B是空间式的，则f是frame同态当且仅当g保素元。

证明 设f是 frame 同态，对于$b \in pt^o B$，若 $g(b) = 1$，则由 $b \geqslant fg(b)$与 $f(1) = 1$ 可知$b = 1$，这与 b 是素元矛盾，所以 $g(b) \neq 1$。若$g(b) \geqslant x \wedge y$，其中$x$，$y \in A$，则由$f \dashv g$可知$b \geqslant f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ (根据f是frame同态)。于是由$b \in pt^o B$，即b是B的素元可知$b \geqslant f(x)$或$b \geqslant f(y)$。由于$f \dashv g$，所以，$g(b) \geqslant x$或$g(b) \geqslant y$。综上所证，则知$g(b)$是 A 的素元。所以，g 保素元。

反之，设 g 保素元。因为 $f \dashv g$，即 f 有右伴随，故由定理(2.8.2)可知f保任意并。

任取$x, y \in A$，则

$f(x \wedge y)$

$= \bigwedge\{b \in pt^o B \mid f(x \wedge y) \leqslant b\}$ (根据定理 (3.3.2)，则由B是空间式的可知B的元可表为素元之交)

$= \bigwedge\{b \in pt^o B \mid x \wedge y \leqslant g(b)\}$ (根据$f \dashv g$)

$= \bigwedge\{b \in pt^o B \mid x \leqslant g(b) 或 y \leqslant g(b)\}$

(根据g保素元，故知$g(b)$是A的素元)

$= \wedge[\{b\in pt^o B \mid x\leqslant g(b)\}\cup\{b\in pt^o B\mid y\leqslant g(b)\}]$

$=[\wedge\{b\in pt^o B\mid x\leqslant g(b)\}]\wedge[\wedge\{b\in pt^o B\mid y\leqslant g(b)\}]$

$=[\wedge\{b\in pt^o B\mid f(x)\leqslant b\}]\wedge[\wedge\{b\in pt^o B\mid f(y)\leqslant b\}]$

(根据$f\dashv g$)

$=f(x)\wedge f(y)$.

又 $f(1)=\wedge\{b\in pt^o B\mid f(1)\leqslant b\}$

$=\wedge\{b\in pt^o B\mid 1\leqslant g(b)\}$ (根据$f\dashv g$)

$=\wedge\phi$ (根据 $b\in pt^o B$，即b是B的素元，并且g保素元，故知$g(b)$是A的素元，于是$g(b)\neq 1$，这里$\forall b\in pt^o B$，除非b不是素元)

$=1$.

所以，f保有限交。

综上所证，则知$f: A\to B$保任意并与保有限交。所以，f是frame同态。

§3.4 凝聚Locale

(3.4.1) **定义** 设L是完备格，$a\in L$.若$\forall S\subseteq L$，当$\vee S\geqslant a$时存在有限集$F\subseteq S$使得$\vee F\geqslant a$，则称a为完备格L的有限元。完备格L的全体有限元之集记作$K(L)$.

(3.4.2) **命题** 设L是完备格，$a\in L$，则下列条件等价：

(i) a是L的有限元；

(ii) 对于L的任意定向子集S，若$\vee S\geqslant a$，则存在$s\in S$使得$s\geqslant a$；

(iii) $\forall I\in Idl(L)$，若$\vee I\geqslant a$，则$a\in I$.

若L是frame，则可增加一个等价条件：

(iv) $\forall S\subseteq L$，若$\vee S=a$，则存在有限集$F\subseteq S$使得$\vee F=a$.

证明 (i)$\Longrightarrow$(ii) 设 $S\subseteq L$ 是定向子集，$\bigvee S\geqslant a$. 于是根据 (i) 存在S的有限子集F使得$\bigvee F\geqslant a$. 但因S是定向集，并且F是S的有限子集，所以存在$s\in S$使得$s\geqslant\bigvee F\geqslant a$. 即(ii)成立.

(ii)$\Longrightarrow$(i) 设$S\subseteq L$，若$\bigvee S\geqslant a$，令

$$D=\{\bigvee E\mid E\subseteq S,\ E\text{是有限集}\}\subseteq L,$$

则D是L的定向子集，并且$\bigvee D\geqslant a$，于是由(ii)可知S存在有限子集F使得$\bigvee F\geqslant a$. 所以，a是L的有限元. 即(i)成立.

(i)$\Longrightarrow$(iii) 设 $I\in Idl(L)$. 若 $\bigvee I\geqslant a$，则由 (i) a是有限元可知，存在有限集$F\subseteq I$使得$\bigvee F\geqslant a$. 但是I 是理想，并且F是有限集，故知$\bigvee F\in I$. 所以，由$a\leqslant\bigvee F$可知$a\in I$，即(iii)成立.

(iii)$\Longrightarrow$(ii) 设$S\subseteq L$是定向子集.若 $\bigvee S\geqslant a$，令$I=\downarrow(S)$，则$I\in Idl(L)$，并且$\bigvee I\geqslant a$.于是由(iii)可知$a\in I=\downarrow(S)=\bigcup\{\downarrow(s)\mid s\in S\}$. 即有$s\in S$使用$a\in\downarrow(s)$. 所以，$s\geqslant a$，即(ii)成立.

(i)$\Longrightarrow$(iv) 设$S\subseteq L$. 若$\bigvee S=a$，则由(i) a 是有限元可知存在S的有限子集F使得$\bigvee F\geqslant a$.但是$\bigvee F\geqslant\bigvee S=a$.所以(iv)成立.

(iv)$\Longrightarrow$(i) 设$S\subseteq L$. 若$\bigvee S\geqslant a$，令

$T=\{s\wedge a\mid s\in S\}$，则$T\subseteq L$，并且

$$\begin{aligned}\bigvee T&=\bigvee\{s\wedge a\mid s\in S\}\\&=a\wedge\bigvee S\ (\text{根据}L\text{是frame})\\&=a.\end{aligned}$$

于是由(iv)可知，存在T的有限子集

$$T^*=\{s\wedge a\mid s\in F\}$$

使得$\bigvee T^*=a$. 显然，$F\subseteq S$是有限子集，并且$\bigvee F\geqslant a$. 所以，a是L的有限元，即(i)成立.

(3.4.3) **命题** 设L是完备格，则$K(L)$是L的子$\bigvee$-半格.

证明 因为$\bigvee\phi=0$，从而0是L的有限元. 即$0\in K(L)$. 其次，设$a,b\in K(L)$，即a,b都是L的有限元. 若$S\subseteq L$，并且$\bigvee S\geqslant a\vee b$，则$\bigvee S\geqslant a$与$\bigvee S\geqslant b$.于是由$a$，$b$都是$L$的有限元可知存在$S$中有限集$F_a$与$F_b$使得

$$\bigvee F_a \geqslant a \quad 与 \quad \bigvee F_b \geqslant b.$$

令$F = F_a \cup F_b$，则$F \subseteq S$是有限集，并且

$$\bigvee F = \bigvee (F_a \cup F_b) = (\bigvee F_a) \vee (\bigvee F_b) \geqslant a \vee b.$$

所以，$a \vee b \in K(L)$，即$a \vee b$是L的有限元。

综上所证，则知$K(L)$对L中有限并运算封闭．所以$K(L)$是L的子$\vee$-半格。

(3．4．4)**定理** 设L是完备格，则$K(L)$是L的子格当且仅当$K(L)$是L的子$\wedge$-半格。

证明 由命题(3．4．3)即得。

(3．4．5)**引理** 设D是分配格,则对于D的理想族$\{I_\alpha | \alpha \in \Gamma\} \subseteq Idl(D)$，有

$$\bigvee_{\alpha \in \Gamma} I_\alpha = \{x_1 \vee \cdots \vee x_n | x_i \in I_{\alpha_i}, \ \alpha_i \in \Gamma, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

证明 根据命题(2.5.7)可知$Idl(D)$是完备格，故$\bigvee I_\alpha \in Idl(D)$，并且是$D$的含$\bigcup I_\alpha$的最小理想,即$D$的含$\bigcup I_\alpha$的全体理想之交。记

$$I = \{x_1 \vee \cdots \vee x_n | x_i \in I_{\alpha_i}, \ \alpha_i \in \Gamma, \ i = 1, 2, \cdots, n\},$$

则I是D的理想．事实上，易见I对有限并封闭，故I是D的定向子集．其次设$x_1 \vee \cdots \vee x_n \in I$， 若$x \leqslant x_1 \vee \cdots \vee x_n$，则

$$x = x \wedge (x_1 \vee \cdots \vee x_n)$$
$$= (x \wedge x_1) \vee \cdots \vee (x \wedge x_n) \in I \text{（根据}D\text{为分配格）},$$

于是I是下集．所以，I是D的理想，即$I \in Idl(D)$。

显然，D的理想I是含一切$I_\alpha\ (\alpha \in \Gamma)$的$D$的理想，所以$\bigvee I_\alpha \subseteq I$．反之，任取

$$x_1 \vee \cdots \vee x_n \in I,$$

其中$x_i \in I_{\alpha_i}$，$\alpha_i \in \Gamma$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则

$$x_i \in \bigcup_{j=1}^{n} I_{\alpha_j} \subseteq \bigvee I_\alpha.$$

因为$\bigvee I_\alpha$是D的理想，于是由理想是定向集可知$x_1 \vee \cdots \vee x_n \in$

$\vee I_a$. 所以，$I\subseteq\vee I_a$. 综上所证，则知$\vee I_a=I$.

(3.4.6)定理 设 D 是分配格，则 $Idl(D)$ 是 frame（或 locale）.

证明 根据命题(2.5.7)可知$Idl(D)$就包含关系$\subseteq$构成完备格. 以下证明$Idl(D)$满足无限分配律. 事实上，设 $I\in Idl(D)$ 与$\forall a\in\Gamma$, $I_a\in Idl(D)$，根据引理(3.4.5)，任取

$$x_1\vee\cdots\vee x_n\in\bigvee_{a\in\Gamma}(I\cap I_a),$$

其中$x_i\in I$, $x_i\in I_{a_i}$, $a_i\in\Gamma$与$i=1, 2, \cdots n$,
则$x_1\vee\cdots\vee x_n\in I$与$x_1\vee\cdots\vee x_n\in\bigvee_{a\in\Gamma}I_a$. 所以，

$$x_1\vee\cdots\vee x_n\in I\cap(\vee I_a),$$

即$\bigvee_{a\in\Gamma}(I\cap I_a)\subseteq I\cap(\vee I_a)$. 反之，根据引理(3.4.5)，任取

$$x_1\vee\cdots\vee x_n\in I\cap(\bigvee_{a\in\Gamma}I_a),$$

则 $x_1\vee\cdots\vee x_n\in I$ 与 $x_1\vee\cdots\vee x_n\in\bigvee_{a\in\Gamma}I_a$，其中$x_i\in I_{a_i}$, $a_i\in\Gamma$, $i=1, 2, \cdots, n$. 于是

$$x_i\in I\cap I_{a_i},\ i=1, 2, \cdots, n.$$

所以，$x_1\vee\cdots\vee x_n\in\bigvee_{a\in\Gamma}(I\cap I_a)$. 即

$$I\cap(\vee I_a)\subseteq\vee(I\cap I_a).$$

综上所证，则知

$$\bigvee_{a\in\Gamma}(I\cap I_a)=I\cap\bigvee_{a\in\Gamma}I_a.$$

即$Idl(D)$满足无限分配律，证毕.

注意 在定理证明中，由于理想的交是理想，故在$Idl(D)$中有$\wedge=\cap$. 但是，一般说来$\vee\neq\cup$，这是由于两个理想的并(集并)未必是理想.

(3.4.7)定义 设L是 locale. 若$K(L)$是L的子格，并且L

的元均可表为$K(L)$的元之并，则称locale$L$是凝聚的。

(3.4.8)**引理** 设D是分配格，则$Idl(D)$的元是有限元当且仅当它是D的主理想。

证明 设$I\in Idl(D)$是有限元.因为I是D的理想,故得

$$I=\bigcup\{\downarrow(x)\mid x\in I\}$$

$$=\bigvee\{\downarrow(x)\mid x\in I\}$$ （根据$\bigcup\{\downarrow(x)\mid x\in I\}$，

即I是含一切$\downarrow(x)$ $(x\in I)$的最小理想，故

$$I=\bigvee\{\downarrow(x)\mid x\in I\})。$$

但是I是frame$Idl(D)$的有限元，于是存在$x_1,\cdots,x_n\in I$使得

$$I=\bigvee_{i=1}^{n}\{\downarrow(x_i)\mid x_i\in I\}$$

$$=\downarrow\left(\bigvee_{i=1}^{n}x_i\right).$$

所以，I是D的主理想。这就证明了对于分配格D，则$Idl(D)$的有限元是D的主理想。

反之,设I是分配格D的主理想,于是存在$a\in D$使得

$$I=\downarrow(a).$$

若$\{I_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}\subseteq Idl(D)$，并且使得$\downarrow(a)\subseteq\bigvee_{\alpha\in\Gamma}I_\alpha$，则$a\in\bigvee_{\alpha\in\Gamma}I_\alpha$。于是由引理(3.4.5)可知存在$x_i\in I_{\alpha_i}$，其中$\alpha_i\in\Gamma$，$i=1,2,\cdots,n$，使得

$$a=x_1\vee\cdots\vee x_n.$$

从而$a\in\bigvee_{i=1}^{n}I_{\alpha_i}$。所以，$\downarrow(a)\subseteq\bigvee_{i=1}^{n}I_{\alpha_i}$。即$I=\downarrow(a)$是$Idl(D)$的有限元。这就证明了分配格$D$的主理想是$Idl(D)$的有限元。

(3.4.9)**定理** 设D是分配格，则$Idl(D)$是凝聚 locale。

证明 根据定理(3.4.6)，则对于分配格D，$Idl(D)$是locale。

于是由引理(3.4.8)可知

$$K(Idl(D))=\{\downarrow(a)\mid a\in D\}.$$

易见 $Idl(D)$ 的最大元$\downarrow(1)\in K(Idl(D))$（此处 1 为$D$中最大元），并且若$a,b\in D$，则

$$\downarrow(a)\wedge\downarrow(b)=\downarrow(a\wedge b).$$

于是由定理(3.4.4)可知$K(Idl(D))$是$Idl(D)$的子格.

若$I\in Idl(D)$，则

$$I=\bigcup\{\downarrow(x)\mid x\in I\}$$
$$=\bigvee\{\downarrow(x)\mid x\in I\},$$

即I可表为D的主理想之并. 所以，由引理（3.4.8）可知I可表为$K(Idl(D))$的元之并.

综上所证，则知对于分配格D，$Idl(D)$是凝聚locale.

(3.4.10) **定理** 若L是凝聚 locale，则存在分配格D，使得L格同构于$Idl(D)$.

证明 设L是凝聚 locale，令$D=K(L)$,则D是L的子格,并且D还是分配格. 定义映射

$$f: L\to Idl(K(L))\,(=Idl(D)),$$
$$a\mapsto f(a)=\{x\in K(L)\mid x\leqslant a\}.$$

因为$f(a)$是下集，并且由命题(3.4.3)可知 $f(a)$是定向集，于是它是分配格D的理想，即$f(a)\in Idl(K(L))$. 根据引理(3.4.8)，则易见f是单满映射，并且f与f^{-1}都保序. 所以，由定理(2.3.6)可知

$$f: L\to Idl(K(L))$$

是格同构(根据(2.4.10)注，则知f是完备格同构).

(3.4.11) **定义** 设 A,B 都是凝聚 locale，又设 $f: B\to A$ 为 locale 连续映射，则对应的 frame 同态记作 $f^*: A\to B$. 若$f^*(K(A))\subseteq K(B)$，则称 locale 连续映射$f: B\to A$为凝聚的.

设$\mathbf{DLat}$ 表示以分配格为对象，以格同态为态射的范畴，$\mathbf{CohLoc}$表示以凝聚locale 为对象，以凝聚连续映射为态射的

范畴．于是由定理(3.4.9)可知，对于$\boldsymbol{DLat}$中对象D，则$Idl(D)$是凝聚locale，即是$\boldsymbol{CohLoc}$中对象；并且对于$\boldsymbol{DLat}$中态射$f: D_1 \to D_2$，则$Idl(f): Idl(D_2) \to Idl(D_1)$是凝聚连续映射，即为$\boldsymbol{CohLoc}$中态射，这里$Idl(f)^*$是由下列交换图(3.4.1)决定的，并且易见$Idl(f)^*$是唯一的．

$$\begin{array}{ccc} Idl(D_1) & \xrightarrow{Idl(f)^*} & Idl(D_2) \\ \downarrow(-)\ \Big\uparrow & \searrow (-)^f & \Big\uparrow\ \downarrow(-) \\ D_1 & \xrightarrow{f} & D_2 \end{array}$$

图(3.4.1)

由此易证：
$$Idl: \boldsymbol{DLat} \to \boldsymbol{CohLoc}$$
是函子．反之，对于$\boldsymbol{CohLoc}$中对象L，则$K(L)$是分配格，即是$\boldsymbol{DLat}$中对象；并且对于$\boldsymbol{CohLoc}$中态射$f: L_1 \to L_2$，则

$$Kf = f^* | K(L_2): K(L_2) \to K(L_1)$$

是格同态，即是$\boldsymbol{DLat}$中态射．所以

$$K: \boldsymbol{CohLoc} \to \boldsymbol{DLat}$$

是函子．

(3.4.12)定理 范畴$\boldsymbol{DLat}$等价于范畴$\boldsymbol{CohLoc}$的对偶范畴$\boldsymbol{CohLoc}^{op}$．换言之，范畴$\boldsymbol{DLat}$与范畴$\boldsymbol{CohLoc}$是对偶等价的．

证明 由定理(3.4.9)和定理(3.4.10)即证．

(3.4.13)定理 凝聚locale是空间式的．

证明 设L是凝聚 locale，则根据定理(3.4.10)存在分配格D使得L与$Idl(D)$是格同构．

设I，$J \subseteq Idl(D)$，$I \not\subseteq J$．任取$a \in I - J$，则$J \cap \uparrow(a) = \phi$．根据定理(2.6.4)与定理(2.6.5)，则对于分配格D的理想J与滤子$F = \uparrow(a)$存在D的素理想M，使得

$$J \subseteq M \quad 与 \quad M \cap \uparrow(a) = \phi.$$

于是从$M \cap \uparrow(a) = \phi$可知$a \notin M$，即$I \not\subseteq M$．但是由定理(2.7.3)可知分配格$D$的素理想就是$Idl(D)$的素元，即$M \in pt^\circ(Idl(D))$．

故由定理(3.3.2)可知，凝聚locale $Idl(D)$是空间式的。由于L与$Idl(D)$是格同构的，所以凝聚locale L是空间式的。

§3.5 正则Locale与紧Locale

(3.5.1)**定义** 设D是分配格，又设$a,b\in D$.若存在$c\in D$使得

$$c\wedge a=0 \quad 与 \quad c\vee b=1,$$

则称a是well inside b，记作$a\lessdot b$。

(3.5.2)**命题** 设D是分配格。

(i) 设$a\in D$，则$a\lessdot a$当且仅当a在D中有补元；

(ii) 设a，$b\in D$，若$a\lessdot b$，则$a\leqslant b$；

(iii) 设a，b，c，$d\in D$，若$a\leqslant b\lessdot c\leqslant d$，则$a\lessdot d$；

(iv) 设$a\in D$，记

$$I_a=\{x\in D\,|\,x\lessdot a\},$$
$$F_a=\{x\in D\,|\,a\lessdot x\},$$

则I_a是D的理想，F_a是D的滤子。

证明 (i) 是显然的。

(ii) 设a，$b\in D$，若$a\lessdot b$，则存在$c\in D$使得$c\wedge a=0$与$c\vee b=1$。于是

$$\begin{aligned}a&=a\wedge 1\\&=a\wedge(b\vee c)\\&=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\\&=a\wedge b.\end{aligned}$$

所以，$a\leqslant b$。

(iii)设$a,b,c,d\in D$，若$a\leqslant b\lessdot c\leqslant d$，则由$b\lessdot c$可知存在$x\in D$使得

$$b\wedge x=0 \quad 与 \quad c\vee x=1.$$

但是$a\leqslant b$与$c\leqslant d$，所以

$$a\wedge x=0 \quad 与 \quad d\vee x=1,$$

即$a\ll d$.

(iv) 设$F_a=\{x\in D\mid a\ll x\}$，其中$a\in D$，又设$b\in F_a$，即$a\ll b$。若$b\leqslant x$，则得$a\leqslant a\ll b\leqslant x$.从而由(iii)可知$a\ll x$，即$x\in F_a$。这表明$F_a$是上集；设$b_1$，$b_2\in F_a$，即$a\ll b_1$与$a\ll b_2$，则存在$c_1$，$c_2\in D$，使得

$$a\wedge c_i=0 \quad 与 \quad c_i\vee b_i=1,$$

其中$i=1$，2.于是得

$$a\wedge(c_1\vee c_2)=0 \quad 与 \quad (c_1\vee c_2)\vee(b_1\wedge b_2)=1.$$

即$a\ll b_1\wedge b_2$.所以，$b_1\wedge b_2\in F_a$。这表明F_a是余定向集。综上所证，则知F_a是D的滤子。

同理可证：I_a是D的理想。

(3.5.3) **定义** 设L是locale，若$\forall a\in L, a=\bigvee\{x\in L\mid x\ll a\}$，则称locale L是正则的。

(3.5.4) **注** 设$(X, \Omega(X))$是拓扑空间，则拓扑空间$(X, \Omega(X))$是正则的

$\Longleftrightarrow \forall G\in\Omega(X)$，$\forall x\in G$，存在$K\in\Omega(X)$使得$x\in K\subseteq\overline{K}\subseteq G$(注意，$\overline{K}$表示$K$的闭包)

$\Longleftrightarrow \forall G\in\Omega(X)$,

$$G=\bigcup\{K\in\Omega(X)\mid \overline{K}\subseteq G\}$$

$\Longleftrightarrow \forall G\in\Omega(X)$,

$G=\bigcup\{K\in\Omega(X)\mid (X-\overline{K})\cap K=\phi与(X-\overline{K})\cup G=X\}$

$\Longleftrightarrow \forall G\in\Omega(X)$,

$G=\bigcup\{K\in\Omega(X)\mid \exists W\in\Omega(X)使得K\cap W=\phi与$
$W\cup G=X\}$.

即locale $\Omega(X)$是正则的。所以，上述表明拓扑空间$(X, \Omega(X))$是正则的当且仅当locale$\Omega(X)$是正则的。

(3.5.5) **定理** 正则locale的子locale是正则的。

证明 设L是正则locale，$j: L\to L$是L上核，并且$L_j=\{x\in L\mid j(x)=x\}$是正则locale L的子locale。任取$a\in L_j$，则

$j(a)=a$。若在L中，

$$x \lessdot_L a,$$

则存在$c\in L$，使得$x\wedge c=0$与$c\vee a=1$。于是得$j(x)\wedge j(c)=j(o)$与$j(c)\vee a\geqslant c\vee a=1$。这表明：在$L_j$中，$j(x)\lessdot_{L_j} a$。

因为$\forall a\in L_j$，有

$a=\bigvee_L\{x\in L\,|\,x\lessdot_L a\}$（根据$L$是正则的）

$\leqslant\bigvee_L\{j(x)\,|\,x\in L,\ x\lessdot_L a\}$（根据$x\leqslant j(x)$）

$\leqslant\bigvee_L\{j(x)\in L_j\,|\,x\in L,\ j(x)\lessdot_{L_j} a\}$

（根据若$a\in L_j$，$x\lessdot_L a$，则$j(x)\lessdot_{L_j} a$）

$\leqslant\bigvee_{L_j}\{x\in L_j\,|\,x\lessdot_{L_j} a\}$

与

$a=\bigvee_{L_j}\{x\in L_j\,|\,x\leqslant a\}$

$\geqslant\bigvee_{L_j}\{x\in L_j\,|\,x\lessdot_{L_j} a\}$（根据若$x\lessdot a$，则$x\leqslant a$）。

所以，$a=\bigvee_{L_j}\{x\in L_j\,|\,x\lessdot_{L_j} a\}$。即$L_j$是正则locale。

(3.5.6) **定义** 设L是locale。若$\forall a\in L$，

$$a=\bigvee\{x\in L^c\,|\,x\leqslant a\},$$

其中L^c表示L中全体有补元的元作成的集，则称locale L是零维的.

(3.5.7) **定理** 零维locale是正则的。

证明 设L是零维locale，则$\forall a\in L$，

$a=\bigvee\{x\in L^c\,|\,x\leqslant a\}$

$=\bigvee\{x\in L^c\,|\,x\leqslant x\lessdot x\leqslant a\}$

（根据命题(3.5.2)(i)）

$\leqslant\bigvee\{x\in L^c\ x\lessdot a\}$

（根据命题(3.5.2)(iii)）

$\leqslant\bigvee\{x\in L\,|\,x\lessdot a\}$

与

$$a = \bigvee\{x\in L \mid x\leqslant a\}$$
$$\geqslant \bigvee\{x\in L \mid x\lessdot a\}$$

(根据命题(3.5.2)(ii))。

所以，$a=\bigvee\{x\in L \mid x\lessdot a\}$。即$L$是正则的locale。

(3.5.8) **定义** 设L是locale。若L的最大元1是L的有限元，则称locale L是紧的。

(3.5.9) **定理** (i)紧locale的闭子locale是紧的；

(ii)正则locale的紧子locale是闭的。

证明 (i)设L是紧locale，于是L中最大元1是L的有限元。所以，$\forall a\in L$，1在闭子locale$L_{c(a)}=\uparrow(a)$中也是有限元，其中

$$c(a)=a\vee(-):L\to L$$

是映射。这就证明了紧locale的闭子locale是紧的。

(ii)设L是正则locale，L_j是L的紧子locale。不妨设$j(0)=0$。只需证：$L_j=L$。

设$a\in L$，则由L的正则性可知$a=\bigvee_L\{x\in L \mid x\lessdot a\}$。若$j(a)=1$，则由 j 保并得

$$1=j(a)=\bigvee_{L_j}\{j(x) \mid x\lessdot a\}.$$

但是易证$\{j(x) \mid x\lessdot a\}$是$L_j$中定向集，故对于紧 locale L_j，由命题(3.4.2)可知：存在$x_0\in L$，使得$x_0\lessdot a$与$j(x_0)=1$。因为$x_0\lessdot a$，于是存在$c\in L$使得

$$x_0\wedge c=0 \quad 与 \quad c\vee a=1.$$

从而$0=j(0)=j(x_0\wedge c)=j(x_0)\wedge j(c)$。但是$j(x_0)=1$，所以由$0=j(c)\geqslant c$与$c\vee a=1$得 $a=1$。上述讨论表明：在题设与 $j(0)=0$ 条件下，若$a\in L$，$j(a)=1$，则$a=1$。

任取$x\in L$。若$b\lessdot j(x)$，则存在$c\in L$使得$b\wedge c=0$与$c\vee j(x)=1$。由$j:L\to L$是保序映射(根据$j:L\to L$保有限交)可知

$$j(x\vee c)\geqslant j(x)\vee j(c)$$
$$\geqslant j(x)\vee c \text{(根据} j(c)\geqslant c\text{)}.$$

于是 $j(x\vee c)\geqslant j(x)\vee c=1$。从而，由前述讨论可知，$x\vee c=1$。

因此，由$b\wedge c=0$与$c\vee x=1$，可知$b\leqslant x$。上述讨论表明：在给定条件下，若$b\leqslant j(x)$，则$b\leqslant x$。根据此结论，于是$\forall x\in L$，有

$$j(x)=\bigvee\{b\in L\mid b\leqslant j(x)\}\text{（根据}L\text{是正则的）}$$
$$\leqslant\bigvee\{b\in L\mid b\leqslant x\}$$
$$=x.$$

但是$\forall x\in L$，$j(x)\geqslant x$，所以$j(x)=x$。即

$$L=L_j.$$

这表明L_j是闭的。

(3.5.10)**命题**　非平凡紧locale至少有一点。

证明　设L是非平凡紧locale。因为locale L是非平凡的，故$0\neq 1$。记

$$I=\downarrow(0)\text{ 与 }\quad F=\uparrow(1),$$

则I与F分别是L的理想与滤子，并且$I\cap F=\phi$。于是由定理(2.6.4)可知，存在L的理想M使得$M\supseteq I$与$M\cap F=\phi$，并且关于此性质M是极大的。从而再由定理(2.6.5)可知，M是L的素理想。又因$1\notin M$，于是由L是紧的可知$\vee M\neq 1$，从而L的主理想$\downarrow(\vee M)$是L的真理想。但是$M\subseteq\downarrow(\vee M)$，所以由$M$的极大性可知

$$M=\downarrow(\vee M).$$

综上所证，则知M是L的主素理想。所以由定理(2.7.4)可知$\vee M\in pt^0L$。这表明非平凡紧locale至少有一点。

(3.5.11)**定理**　紧正则locale是空间式的。

证明　设locale L是紧正则的。任取a，$b\in L$，$a\nleqslant b$，则由locale L的正则性可知

$$a=\bigvee\{x\in L\mid x\lessdot a\}.$$

于是存在$d\in L$使得$d\lessdot a$，$d\nleqslant b$。故由$d\lessdot a$可知：存在$e\in L$使得$d\wedge e=0$与$e\vee a=1$。从而由$d\nleqslant b$可知，$e\vee b\neq 1$（否则，由$e\vee b=1$可知$d=d\wedge(e\vee b)=(d\wedge e)\vee(d\wedge b)=0\vee(d\wedge b)=d\wedge b$，即$d\leqslant b$，得出矛盾）。因为$e\vee b\neq 1$，故$L$的闭子locale

$$L_{c(e\vee b)}=\uparrow(e\vee b)$$

是非平凡的，又根据定理（3.5.9）可知，紧 locale L 的闭子 locale $L_{c(e\vee b)}$是紧的．于是由命题（3.5.10）可知，locale $L_{c(e\vee b)}$至少有一点。不妨设$x\in pt^{\circ}(L_{c(e\vee b)})\subseteq pt^{\circ}L$。即$x$是$L$的素元，并且$x\geqslant(e\vee b)\geqslant b$。但是$x\ngeqslant a$（否则由$x\geqslant a$与$x\geqslant e\vee b$可知$x\geqslant a\vee(e\vee b)=1$，这与$x$是$L$的素元矛盾），所以由定理（2.3.2）可知$L$是空间式的。

§3.6 Sober 空间

设X是拓扑空间，则拓扑空间X的开集格$\Omega(X)$是 locale。$\Omega(X)$的素元即是拓扑空间X的素开集．根据定理（2.7.2）可知，分配格的素元与交既约元等价，所以拓扑空间X的开集G（即$G\in\Omega(X)$）是素开集当且仅当对于$K_1,K_2\in\Omega(X)$，若$G=K_1\cap K_2$，则$G=K_1$或$G=K_2$。据此可知，G是拓扑空间X的素开集当且仅当G的余集$X-G$是拓扑空间X的不可约闭集，即它不能表为它的两个真闭子集之并。

（3.6.1）例 设X是拓扑空间，则$\forall x\in X$，x的闭包$\overline{\{x\}}$（也记作$cl\{x\}$）是拓扑空间X的不可约闭集。

证明 若$\overline{\{x\}}=F\cup H$，并且F与H都是$\overline{\{x\}}$的真闭子集，则$x\in F$或$x\in H$。不妨设$x\in F$，则由F是含x的闭集可知$\overline{\{x\}}\subseteq F$。但是假设$F\sqsubset\overline{\{x\}}$，所以$F=\overline{\{x\}}$．这与假设$F$是$\overline{\{x\}}$的真闭子集矛盾。

（3.6.2）定义 设X是拓扑空间，若拓扑空间X的任意不可约闭集都是X中唯一点的闭包，则称拓扑空间X为Sober空间。

（3.6.3）定理 设$(X,\ \Omega(X))$是拓扑空间，定义映射

$$\phi: X\to pt^{\circ}\Omega(X)$$
$$x\mapsto(X-\overline{\{x\}})\in pt^{\circ}\Omega(X),$$

则下列条件等价：

（i）$(X,\ \Omega(X))$是Sober空间；

(ii) ψ是双射.

证明 (i)$\Longrightarrow$(ii)对于映射

$$\psi:\ X\to pt^\circ\Omega(X)$$
$$x\mapsto X-\overline{\{x\}},$$

任取$K\in pt^\circ\Omega(x)$,即K是$\Omega(X)$的素元或说是拓扑空间X的素开集,于是$X-K$是拓扑空间X的不可约闭集. 但由题设X是Sober空间可知存在唯一点$x\in X$使得

$$\overline{\{x\}}=X-K,\ \text{即}k=X-\overline{\{x\}}.$$

所以$\psi(x)=X-\overline{\{x\}}=K$. 这表明$\psi$是满射. 任取$x_1,x_2\in X$, 若$\psi(x_1)=\psi(x_2)$, 即

$$X-\overline{\{x_1\}}=X-\overline{\{x_2\}},$$

则$\overline{\{x_1\}}=\overline{\{x_2\}}$. 但是, 由拓扑空间$X$是Sober空间(即$X$中每一不可约闭集都是$X$中唯一点的闭包)以及$\overline{\{x_1\}}$与$\overline{\{x_2\}}$都是拓扑空间$X$的不可约闭集可知, $\overline{\{x_1\}}$与$\overline{\{x_2\}}$都是X中唯一点的闭包. 所以,由$\overline{\{x_1\}}=\overline{\{x_2\}}$得$x_1=x_2$, 即$\psi$是单射. 综上所证, 则知

$$\psi: X\to pt^\circ\Omega(X)$$

是双射.

(ii)$\Longrightarrow$(i)设X为拓扑空间, $\Omega(X)$是X上拓扑,

$$\psi: X\to pt^\circ\Omega(X)$$
$$x\mapsto(X-\overline{\{x\}})$$

是双射.对于拓扑空间X的任意不可约闭集F,则$X-F\in pt^\circ\Omega(X)$, 即$X-F$是$\Omega(X)$的素元, 或说是拓扑空间X的素开集. 但是ψ是双射, 故存在唯一点$x\in X$使得

$$\psi(x)=X-F.$$

根据ψ定义有$\psi(x)=X-\overline{\{x\}}$. 所以

$$X-F=X-\overline{\{x\}}.$$

即$F=\overline{\{x\}}$. 这表明$(X,\Omega(X))$是Sober空间.

(3.6.4)定理 设$(X,\Omega(X))$为拓扑空间,

$$\psi: X\longrightarrow pt^0\Omega(X)$$

$$x \longmapsto X - \overline{\{x\}}$$

是映射，则

(i) 若$(X, \Omega(X))$是Sober空间，则ψ是同胚；

(ii) 拓扑空间$(X,\Omega(X))$是T_0空间当且仅当ψ是单射.特别地，Sober 空间是T_0空间；

(iii)T_2空间是 Sober 空间.

证明 (i)设拓扑空间$(X,\Omega(X))$是 Sober 空间，则由定理(3.6.3)可知

$$\psi: X \longrightarrow pt^0\,\Omega(X)$$

是双射. 定义映射

$$\varphi: pt^0\,\Omega(X) \longrightarrow X$$

$$X - \overline{\{x\}} \longmapsto x,\text{ 其中}x \in X,$$

则ψ与φ为互逆映射.以下证明ψ与φ都是连续映射. 先证ψ连续.事实上，由定理(3.1.8)可知$pt^0\,\Omega(X)$的开集恰形如

$$\Phi^0(G) = \{K \in pt^0\,\Omega(X) \mid K \not\supseteq G\},$$

这里$G \in \Omega(X)$. 于是对于$pt^0\,\Omega(X)$的开集$\Phi^\circ(G)$，这里$G \in \Omega(X)$，则

$$x \in \psi^{-1}(\Phi^\circ(G))$$

$\Longleftrightarrow \psi(x) \in \Phi^\circ(G)$，即$X - \overline{\{x\}} \in \Phi^\circ(G)$

$\Longleftrightarrow X - \overline{\{x\}} \not\supseteq G$（根据$\Phi^\circ(G)$定义）

$\Longleftrightarrow x \in G$.

所以，$\psi^{-1}(\Phi^\circ(G)) = G \in \Omega(X)$. 这表明$\psi: X \longrightarrow pt^0\,\Omega(X)$反射开集，即$\psi$连续. 再证$\varphi: pt^0\Omega(X) \longrightarrow X$ 连续.事实上，$pt^0\,\Omega(X)$中元K是$\Omega(X)$的素元，即拓扑空间X的素开集，于是$F = X - K$为拓扑空间X的不可约闭集. 但拓扑空间X是Sober 空间，即拓扑空间X的不可约闭集都是X中唯一点的闭包,故存在$x \in X$使得$F = \overline{\{x\}}$，即$K = X - \overline{\{x\}}$.现在对于拓扑空间X的任意开集G,即$G \in \Omega(X)$，则

$K \in \varphi^{-1}(G)$，这里$K = X - \overline{\{x\}}\ (x \in X)$

$$\Longleftrightarrow \varphi(X-\overline{\{x\}}\in G,\ \text{即} x\in G$$

$$\Longleftrightarrow X-\overline{\{x\}}\not\supseteq G$$

$$\Longleftrightarrow X-\overline{\{x\}}\in \Phi^\circ(G)\in\Omega(pt^0\Omega(X)).$$

所以，$\varphi^{-1}(G)=\Phi^\circ(G)\in\Omega(pt^0\Omega(X))$。这表明$\varphi$: $pt^0\Omega(X)\longrightarrow X$反射开集，即$\varphi$连续。综上所证，则知

$$\psi: X\longrightarrow pt^0\Omega(X)$$

是同胚映射。

(ii) 设拓扑空间$(X,\Omega(X))$是T_0空间，又设

$$\psi: X\longrightarrow pt^0\Omega(X)$$
$$x\longmapsto X-\overline{\{x\}}$$

是映射。任取$x_1,x_2\in X$，若$x_1\neq x_2$，则由拓扑空间X是T_0空间可知存在X的开集G(即$G\in\Omega(X)$)含x_1与x_2中一点而不含另一点。不妨设$x_1\in G$与$x_2\notin G$，于是得$x_1\notin\overline{\{x_2\}}$。从而

$$\overline{\{x_1\}}\neq\overline{\{x_2\}}.$$

所以，$\psi(x_1)\neq\psi(x_2)$，即ψ是单射。

反之，设$(X,\Omega(X))$是拓扑空间，

$$\psi: X\longrightarrow pt^0\Omega(X)$$
$$x\longmapsto X-\overline{\{x\}}$$

是单射。对于$x_1,x_2\in X$，若$x_1\neq x_2$，则由ψ是单射可知$\psi(x_1)\neq\psi(x_2)$，即

$$X-\overline{\{x_1\}}\neq X-\overline{\{x_2\}}.$$

于是$\overline{\{x_1\}}\neq\overline{\{x_2\}}$。从而$x_1\notin\overline{\{x_2\}}$或$x_2\notin\overline{\{x_1\}}$，即$x_1\in X-\overline{\{x_2\}}$或$x_2\in X-\overline{\{x_1\}}$。这表明拓扑空间$(X,\Omega(X))$是$T_0$空间。特别地，对于Sober空间，根据定理(3.6.3)可知ψ是双射。所以，Sober空间是T_0空间。

(iii) 设拓扑空间$(X,\Omega(X))$是T_2空间，又设F是拓扑空间$(X,\Omega(X))$的不可约闭集。若有$x_1,x_2\in F$，并且$x_1\neq x_2$，则根据T_2公理可知存在$G_1,G_2\in\Omega(X)$，使得

$x_1\in G_1$，$x_2\in G_2$与$G_1\cap G_2=\phi$。

考虑

$$F = F - G_1 \cap G_2$$
$$= (F - G) \cup (F - G_2),$$

则此式表明F是其两个真闭子集之并，这与F是不可约闭集矛盾。所以，T_2空间的不可约闭集都是单点集。当然是X中唯一点的闭包。这就证明了T_2空间是 Sober 空间。

(3.6.5)**注** 根据定理(3.6.4) 可知 T_2 空间是 Sober 空间，Sober 空间是T_0空间。但是，T_1空间与 Sober 空间是互不蕴涵的。

(3.6.6)**定理** 设L是locale，则$pt^\circ L$是Sober空间。

证明 设映射

$$\psi: pt^\circ L \longrightarrow pt^0(\Omega pt^\circ L)$$
$$x \longmapsto pt^0 L - \overline{\{x\}}.$$

以下证明 ψ 是双射。

先证 ψ 是满射，事实上，设F是拓扑空间 $pt^\circ L$ 的不可约闭集，则

$$K = pt^0 L - F$$

是拓扑空间$pt^0 L$的素开集，即$\Omega(pt^0 L)$ 的素元。但是从$\Phi^\circ: L \longrightarrow \Omega(pt^0 L)$是满射可知，存在$a_F \in L$，使得

$$\Phi^\circ(a_F) = pt^0 L - F.$$

显然，满足上式的$a_F \in L$不是唯一的。由于Φ°保任意并，故可取满足上式的最大元，仍记作a_F，则a_F是L 的素元，即$a_F \in pt^0 L$。因为对于$z \in pt_\circ L$，则

$$z \in \overline{\{a_F\}}$$

$\Longleftrightarrow$若$z \in \Phi^\circ(x)$，则$\Phi^\circ(x) \cap \{a_F\} \neq \phi$，此处$x \in L$。即若$z \in \Phi^\circ(x)(x \in x)$，则$a_F \in \Phi^\circ(x)$

$$\Longleftrightarrow \text{若} z \not\geqslant x, \text{则} a_F \not\geqslant x, \text{其中} x \in L$$

(参看定理(3.1.8))

$$\Longleftrightarrow z \geqslant a_F$$

$$\Longleftrightarrow z \notin \Phi^{\circ}(a_F)$$

$$\Longleftrightarrow z \in pt^{\circ} L - \Phi^{\circ}(a_F).$$

于是得 $\overline{\{a_F\}} = pt^{\circ}L - \Phi^{\circ}(a_F)$

$$= pt^{\circ}L - (pt^{\circ}L - F)$$

$$= F.$$

所以，上述讨论表明：对于拓扑空间$pt^{\circ}L$的任意不可约闭集F，存在$a_F \in pt^{\circ}L$使得$F = \overline{\{a_F\}}$。由此得

$$\begin{aligned}\psi(a_F) &= pt^{0}L\overline{\{a_F\}}\\ &= pt^{0}L - F\\ &= pt^{0}L - (pt^{0}L - K)\\ &= K.\end{aligned}$$

这表明$\psi: pt^{0} L \to pt^{0}(\Omega pt^{0}L)$是满射。

其次证明ψ是单射。为此先证ptL是T_0空间。事实上，设p，$q \in ptL$，$p \neq q$。即

$$p, q: L \longrightarrow 2$$

是不同的 frame 同态。于是存在$a \in L$使得

$$p(a) \neq q(a).$$

故知拓扑空间ptL中开集$\Phi(a)$恰含p与q中一点。这表明ptL是T_0空间。即$pt^{\circ}L$是T_0空间。因此由定理(3.6.4)可知

$$\psi: pt^{0} L \longrightarrow pt^{0}\Omega(pt^{0}L)$$

是单射。

综上所证，则知$\psi: pt^{0}L \longrightarrow pt^{0}\Omega(pt^{0}L)$是双射。所以，根据定理(3.6.3)可知，拓扑空间$pt^{0}L$是Sober空间。

(3.6.7) **定义** 设$(X, \Omega(X))$是拓扑空间，则拓扑空间$pt^{0}\Omega(X)$是 Sober 空间（根据定理(3.6.6)），称作拓扑空间$(X, \Omega(X))$的 Sober 化。

设以 Sober 空间为对象，以连续映射为态射构成的范畴记作 **Sob**，称作Sober空间范畴。它是拓扑空间范畴 **SP** 的满子范畴。设以空间式locale为对象，以locale连续映射为态射构成的范畴

记作$SLoc$，称作空间式Locale范畴．它是Locale范畴Loc的子范畴。由于对于任意拓扑空间X，$\Omega(X)$是空间式 locale，与对于任意locale$L$，拓扑空 间pt^0L(或ptL)是Sober空间，于是结合定理(3.1.11)可得下述定理。

(3.6.8) **定理**

(i) Sober空间范畴Sob与空间 式 Locale范畴$SLoc$是等价的；

(ii) 对于函子：

$$pt\Omega: SP \longrightarrow Sob,$$
$$i: Sob \longrightarrow SP,$$

则 $pt\Omega \dashv i$；

(iii) 对于函子：

$$i: \quad SLoc \longrightarrow Loc,$$
$$\Omega pt: \ Loc \longrightarrow SLoc,$$

则$i \dashv \Omega pt$.

§ 3.7 由T_0拓扑诱导的特殊化序与偏序集上的序拓扑

(3.7.1) **定义** 设$(X, \Omega(X))$是T_0空间，对 于$x_1, x_2 \in X$，命$x_1 \leqslant x_2 \iff$

$$x_1 \in \overline{\{x_2\}} \text{ 或 } \overline{\{x_1\}} \subseteq \overline{\{x_2\}},$$

则$\leqslant$是集X上偏序关系，称之为由拓扑$\Omega(X)$诱导的集X上的特殊化序。

显然，T_0空间 之间的连续映射保持特殊化序，并且对于T_0空间，则其上特殊化序是离散的当且仅当它是T_1空 间(注：偏序集P上偏序关系$\leqslant$称作离散的，如果$x \leqslant y$当且仅当$x = y$，这里$x, y \in P$)。

(3.7.2) **定义** 设$(X, \leqslant)$是偏序集。

(i) 偏序集X上全体上集作成的集族是集X上拓扑，称之为Alexandrov拓扑，记作$\Upsilon(X, \leqslant)$或$\Upsilon(X)$；

(ii) 以集族$\{X-\downarrow(x_1)\cup\cdots\cup\downarrow(x_n)\mid x_1\cdots,x_n\in X\}$为基生成的集$X$上拓扑，称作偏序集$X$上上区间拓扑，记作$\Phi(X,\leqslant)$，或$\Phi(X)$。换言之，偏序集$X$上上区间拓扑是使得一切$\downarrow(x)\ (x\in X)$为闭集的集$X$上最小拓扑。

(3.7.3) **命题** 设$(X,\Omega(X))$是T_0拓扑空间，$\leqslant$是由集X上拓扑$\Omega(X)$诱导的特殊化序，则$\forall a\in X$，有$\overline{\{a\}}=\downarrow(a)$。

证明 因为$x\in\overline{\{a\}}$

$$\Longleftrightarrow x\leqslant a$$

$$\Longleftrightarrow x\in\downarrow(a),$$

所以，$\overline{\{a\}}=\downarrow(a)$。

(3.7.4) **定理** 设$(X,\Omega(X))$是拓扑空间，$\leqslant$是集X上偏序关系，则$\Omega(X)$是集X上T_0拓扑，并且它诱导的集X上特殊化序是$\leqslant$当且仅当

$$\Phi(X,\leqslant)\subseteq\Omega(X)\subseteq\Upsilon(X,\leqslant).$$

证明 设$\Omega(X)$是集X上T_0拓扑，并且它诱导的集X上特殊化序是$\leqslant$。设$G\in\Omega(x)$，任取$a\in G$。若$x\in X$，$a\leqslant x$，则因$\leqslant$是集X上T_0拓扑$\Omega(X)$诱导的特殊化序，于是得$a\in\overline{\{x\}}$，从而$G\cap\overline{\{x\}}\neq\phi$。所以，$x\in G$(否则，由$x\notin G$知$x\in(X-G)\cap\overline{\{x\}}$。但$X-G$是$\Omega(X)$闭集，于是$\overline{\{x\}}\subseteq X-G$，所以$\overline{\{x\}}\cap G=\phi$。得出矛盾)。这表明$G$是上集。由此可知$\Omega(X)\subseteq\Upsilon(X,\leqslant)$。

因为集X上T_0拓扑$\Omega(X)$诱导的特殊化序是$\leqslant$，于是$\forall x\in X$，$\downarrow(x)$是$\Omega(X)$-闭集(根据命题(3.7.3))，所以，$\Phi(X,\leqslant)\subseteq\Omega(X)$。

反之，设集X上拓扑是$\Omega(X)$，$\leqslant$是集X上序关系。又设$\Phi(X,\leqslant)\subseteq\Omega(X)\subseteq\Upsilon(X,\leqslant)$，则易见$\Phi(X,\leqslant)$是集$X$上$T_0$拓扑。但是$\Phi(X,\leqslant)\subseteq\Omega(X)$，故$\Omega(X)$也是$T_0$拓扑。因为$\Phi(X,\leqslant)\subseteq\Omega(X)$，于是$\forall x\in X$，$\downarrow(x)$是$\Omega(X)$-闭集；又因为$\Omega(X)\subseteq\Upsilon(X,\leqslant)$，从而$\downarrow(x)$是含$x$的最小$\Omega(X)$-闭集。因此$\overline{\{x\}}=\downarrow(x)$。由此即得

$$x\leqslant y\text{当且仅当}x\in\overline{\{y\}}.$$

所以，$\leqslant$是由集X上T_0拓扑$\Omega(X)$诱导的特殊化序。

(3.7.5)命题 设$(X,\Omega(X))$是T_0空间，则下列条件等价：

(i) $\Omega(X)=\Upsilon(X,\leqslant)$，其中$\leqslant$是由$T_0$拓扑$\Omega(X)$诱导的集$X$上特殊化序；

(ii) $\Omega(X)$对任意交封闭；

(iii) X中每一点都有最小的$\Omega(X)$-开邻域。

证明 (i)$\Longrightarrow$(ii)设$\{G_\alpha|\alpha\in I\}\subseteq\Omega(X)$．任取$a\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}G_\alpha$,若$x\in X$，$a\leqslant x$，则由$\Omega(X)=\Upsilon(X\leqslant)$可知：$\forall\alpha\in I$，$G_\alpha$是上集．于是由$\forall\alpha\in I$，$a\in G_\alpha$可知$\forall\alpha\in I$，$x\in G_\alpha$．即

$$x\in\bigcap_{\alpha\in I}G_\alpha.$$

所以$\bigcap\limits_{\alpha\in I}G_\alpha$是上集．即$\bigcap\limits_{\alpha\in I}G_\alpha\in\Upsilon(X,\leqslant)=\Omega(X)$.这表明$\Omega(X)$对任意交封闭。

(ii)$\Longrightarrow$(iii)任取$x\in X$，令

$$G_x=\bigcap\{G|x\in G\in\Omega(X)\},$$

则$x\in G_x\neq\phi$．因为$\Omega(X)$对任意交封闭，于是$G_x\in\Omega(X)$．所以，G_x是x的最小$\Omega(X)$开邻域。

(iii)$\Longrightarrow$(i)设$(X,\Omega(X))$是T_0空间，并且$\Omega(X)$诱导的集X上特殊化序是$\leqslant$，则根据定理(3.7.4)可知$\Omega(X)\subseteq\Upsilon(X,\leqslant)$.反之，任取$K\in\Upsilon(X,\leqslant)$，即$K$是$\Upsilon(X,\leqslant)$-开集．根据(iii)，则$\forall x\in K$，$x$有最小$\Omega(X)$-开邻域$G_x$．于是

$$G_x\subseteq K.$$

事实上．若有$a\in G_x$，$a\notin K$，则由K是上集与$x\in K$可知$x\notin\downarrow(a)$．但从命题(3.7.3)可知$\downarrow(a)$是$\Omega(X)$-闭集，从而$(X-\downarrow(a))$是x的$\Omega(X)$-开邻域．故得$G_x\subseteq(X-\downarrow(a))$．这与$a\in G_x$矛盾．所以，$\forall x\in K$有$G_x\subseteq K$．由此得

$$K=\bigcup\{G_x|x\in K,\ G_x\text{是}x\text{的最小}\ \Omega(X)\text{-开邻域}\}\in\Omega(X),$$

即$\Upsilon(X,\leqslant)\subseteq\Omega(X)$.综上所证，则知$\Omega(X)=\Upsilon(X,\leqslant)$.

(3.7.6)定理 设$(X,\leqslant)$是偏序集，并且有定向并，记$\sum(X,\leqslant)$

表示满足下列条件(i)与(ii)的X的全体子集G作成的集族：

(i) G是上集；

(ii) G有定并不可向达性(即若S是X的定向子集，$\vee S\in G$，则$G\cap S\neq\phi$)，

则$\sum(X,\leqslant)$是集X上拓扑，称之为Scott拓扑.

证明 显然有$\phi, X\in\sum(X,\leqslant)$.

设$G_1, G_2\in\sum(x,\leqslant)$，则

$G_1\cap G_2=(\uparrow(G_1))\cap(\uparrow(G_2))=\uparrow(G_1\cap G_2)$，即$G_1\cap G_2$是上集. 又设$S$是$X$的定向子集，$\vee S\in G_1\cap G_2$，则$\vee S\in G_1$与$\vee S\in G_2$. 于是$S\cap G_1\neq\phi$与$S\cap G_2\neq\phi$，从而存在

$$s_1\in S\cap G_1 \quad 与 \quad s_2\in S\cap G_2.$$

但S是定向子集，故存在$s\in S$使得

$$s_1\leqslant s \quad 与 \quad s_2\leqslant s.$$

因此从G_1, G_2都是上集可知$s\in G_1\cap G_2$. 即

$$S\cap(G_1\cap G_2)\neq\phi.$$

这表示$G_1\cap G_2$有定向并不可达性，所以，$G_1\cap G_2\in\sum(X,\leqslant)$.

设集族$\{G_\alpha\mid\alpha\in I\}\subseteq\sum(X,\leqslant)$，则

$$\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}\uparrow(G_\alpha)=\uparrow)\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha),$$

即$\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$是上集.又设$S$是$X$的定向子集,$\vee S\in\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$,则有$\alpha_0\in I$使得$\vee S\in G_{\alpha_0}$.于是由$G_{\alpha_0}$有定向并不可达性可知$S\cap G_{\alpha_0}\neq\phi$,从而

$$S\cap(\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha)\neq\phi.$$

这表示$\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$有定向并不可达性. 所以$\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha\in\sum(X,\leqslant)$.

综上所证，则知$\sum(X,\leqslant)$是集X上拓扑.

(3.7.7) **命题** 设$(X,\Omega(X))$是Sober空间(故是T_0空间). 若$\leqslant$是由$\Omega(X)$诱导的特殊化序，则

(i) 偏序集$(X,\leqslant)$有定向并；

(ii) $\Omega(X)\subseteq\sum(X,\leqslant)$.

证明 (i)设$S\subseteq X$是任意定向集，令

$$T=\overline{\bigcup\{\overline{\{s\}}\mid s\in S\}}.$$

若$T=F_1\cup F_2$，其中F_1,F_2都是X的闭集，则

$$\forall s\in S，有s\in F_1或s\in F_2.$$

若$S\nsubseteq F_1$与$S\nsubseteq F_2$，则存在$s_1,s_2\in S$使得$s_1\notin F_1$与$s_2\notin F_2$。因为S是定向集，从而对于$s_1,s_2\in S$，有$s_0\in S$使得$s_1\leqslant s_0$与$s_2\leqslant s_0$。若$s_0\in F_1$，则由$s_1\leqslant s_0$可知$s_1\in\overline{\{s_0\}}\subseteq F_1$，即$s_1\in F_1$。若$s_0\in F_2$，则由$s_2\leqslant s_0$可知$s_2\in\overline{\{s_0\}}\subseteq F_2$，即$s_2\in F_2$。这与$S\nsubseteq F_1$与$S\nsubseteq F_2$相矛盾。于是$S\subseteq F_1$或$S\subseteq F_2$。所以，由$F_1$与$F_2$都是下集(根据定理(3.7.4))可知

$$T\subseteq F_1或T\subseteq F_2.$$

即T是不可约闭集。

因为$(X,\Omega(X))$是Sober空间，于是X的不可约闭集都是X中唯一点的闭包，即有$x_0\in X$使得$T=\overline{\{x_0\}}$。现在$\forall s\in S$，则$s\in T=\overline{\{x_0\}}$。但是集$X$上偏序关系$\leqslant$是由$T_0$拓扑$\Omega(X)$诱导的，故上式表明：$\forall s\in S$，有$s\leqslant x$。即$x_0$是$S$的上界。若$x_0^*$也是$S$的上界(即$\forall s\in S$，有$s\leqslant x_0^*$)，则$\forall s\in S$，有$\overline{\{s\}}\subseteq\overline{\{x_0^*\}}$。于是$T\subseteq\overline{\{x_0^*\}}$，即$\overline{\{x_0\}}\subseteq\overline{\{x_0^*\}}$。这表明$x_0\leqslant x_0^*$，即$x_0$是$S$的最小上界。所以，$x_0=\bigvee S$。即偏序集$(X,\leqslant)$有定向并。

(ii) 根据题设，则知$\Omega(X)\subseteq\Upsilon(X,\leqslant)$(根据定理(3.7.4))，即$\Omega(X)$的元都是上集。任取$G\in\Omega(X)$，设$S\subseteq X$是定向集，记$x_0=\bigvee S$，则根据以上证明可知

$$T=\overline{\bigcup\{\overline{\{s\}}\mid s\in S\}}=\overline{\{x_0\}}.$$

若$x_0\in G$，则

$$G\cap(\bigcup\{\overline{\{s\}}\mid s\in S\})\neq\phi(根据闭包定义).$$

于是，有$s_0\in S$使得$G\cap\overline{\{s_0\}}\neq\phi$。即

$$G\cap\downarrow(s_0)\neq\phi.$$

从而存在$x\in G$，并且$x\leqslant s_0$。但G是上集，故知$s_0\in G$，即

$$s_0\in S\cap G\neq\phi.$$

所以，G有定向并不可达性。综上所证，则知

$$\Omega(X)\subseteq\sum(X,\leqslant).$$

(3.7.8)**定理** 设$(X,\ \Omega(X))$是Sober空间，并且偏序集$(X,\leqslant)$有定向并，则由$\Omega(X)$诱导的特殊化序是$\leqslant$当且仅当

$$\Phi(X,\leqslant)\subseteq\Omega(X)\subseteq\sum(X,\leqslant).$$

证明 设$(X,\Omega(X))$是Sober空间，并且由$\Omega(X)$诱导的特殊化序是$\leqslant$，则根据定理(3.7.4)与命题(3.7.7)可知：

$$\Phi(X,\leqslant)\subseteq\Omega(X)\subseteq\sum(X,\leqslant).$$

反之，设$(X,\Omega(X))$是Sober空间，偏序集$(X,\leqslant)$有定向并。又设$\Phi(X,\leqslant)\subseteq\Omega(X)\subseteq\sum(X,\leqslant)$，则由$\Phi(X,\leqslant)\subseteq\Omega(X)$可知：$\forall x\in X,\Phi(X,\leqslant)$-闭集$\downarrow(x)$是$\Omega(X)$-闭集。由$\Omega(X)\subseteq\sum(X,\leqslant)$可知：$\forall x\in X$，$\downarrow(x)$是含$x$点的最小$\Omega(X)$-闭集（事实上，$X-\downarrow(x)$是$\Omega(X)$-开集。但由$\Omega(X)\subseteq\sum(X,\leqslant)$可知$X-\downarrow(x)$是是$\sum(X,\leqslant)$-开集，从而是上集。因此它是不含$x$的最大$\Omega(X)$-开集，故$\downarrow(x)$是含$x$的最小$\Omega(X)$-闭集），即$\downarrow(x)=\overline{\{x\}}$。这等价于

$$z\leqslant x\Longleftrightarrow z\in\overline{\{x\}}.$$

但是已知$\Omega(X)$是T_0拓扑，所以$\leqslant$是由$\Omega(X)$诱导的特殊化序。

(3.7.9)**命题** 设$(X,\leqslant_1)$与$(Y,\leqslant_2)$都是有定向并的偏序集，$f:X\to Y$是映射，则f关于Scott拓扑连续当且仅当f是保序与保定向并的映射。

证明 设映射$f:(X,\leqslant_1)\to(Y,\leqslant_2)$是保序与保定向并的，这里$(X,\leqslant_1)$，$(Y,\leqslant_2)$都是有定向并的偏序集。任取$K\in\sum(Y,\leqslant_2)$，设$a\in f^{-1}(K)$，若$a\leqslant_1 x$，则由$f$保序可知$f(a)\leqslant_2 f(x)$。于是由$K$是上集与$f(a)\in K$可知$f(x)\in K$。所以，$x\in f^{-1}(K)$，即$f^{-1}(K)$是上集。又设$S$是$X$的定向子集，并且$\bigvee S\in f^{-1}(K)$，则由$f$保定向并可知

$$f(\bigvee S)=\bigvee\{f(s)\mid s\in S\}.$$

但是$f(\bigvee S)\in K$，并且K有定向并不可达性，从而有$s\in S$使得$f(s)\in K$。于是$s\in f^{-1}(K)$，即$S\cap f^{-1}(K)\neq\phi$。所以，$f^{-1}(K)$

有定向并不可达性．综上所证，则知

$$f^{-1}(K)\in\sum(X,\leqslant_1).$$

即，$f:(X,\leqslant_1)\longrightarrow(Y,\leqslant_2)$关于Scott拓扑是连续的．

反之，设$(X,\leqslant_1)$与$(Y,\leqslant_2)$都是有定向并的偏序集，并且$f:X\to Y$关于Scott拓扑连续．任取$a,b\in X$，并且$a\leqslant_1 b$，若$f(a)\not\leqslant_2 f(b)$，令

$$K=Y-\downarrow(f(b))\in\sum(Y,\leqslant_2),$$

则$f(a)\in K$与$f(b)\notin K$．于是$a\in f^{-1}(K)$与$b\notin f^{-1}(K)$．但是由$f:X\to Y$关于Scott拓扑连续可知$f^{-1}(K)\in\sum(X,\leqslant_1)$，从而$f^{-1}(K)$是上集．因此，由$a\leqslant_1 b$与$a\in f^{-1}(K)$可知$b\in f^{-1}(K)$，得出矛盾．所以，$f(a)\leqslant_2 f(b)$．即

$$f:(X,\leqslant_1)\longrightarrow(Y,\leqslant_2)$$

是保序的．又设S是X的定向子集．令

$$G=\{y\in Y\mid y\not\leqslant_2 c\}=Y-\downarrow(c),$$

其中$c=\bigvee\{f(s)\mid s\in S\}$，则$G\in\sum(Y,\leqslant_2)$，并且$f^{-1}(G)\cap S=\phi$（事实上，若有$s_0\in f^{-1}(G)\cap S$，则$f(s_0)\not\leqslant_2 c$，这与$c=\bigvee\{f(s)\mid s\in S\}$矛盾）．于是$f^{-1}(G)\in\sum(X,\leqslant_1)$（根据$f$关于Scott拓扑是连续的），并且由$f^{-1}(G)$有定向并不可达性可知

$$\bigvee S\notin f^{-1}(G).$$

所以，$f(\bigvee S)\notin G=Y-\downarrow(c)$，即$f(\bigvee S)\leqslant_2 c$．此外，由$f$保序性可知$c\leqslant_2 f(\bigvee S)$．综上所证，则知$f(\bigvee S)=\bigvee f(S)$，即$f$保定向并．

(3.7.10)注　偏序集上保定向并映射必是保序映射．

证明　设$f:(X,\leqslant_1)\longrightarrow(Y,\leqslant_2)$是偏序集之间的保定向并映射．任取$a,b\in X$，若$a\leqslant_1 b$，则$\{a,b\}$是$X$的定向集，于是由$f$保定向并可知

$$\begin{aligned}f(b)&=f(\bigvee\{a,b\})\\&=\bigvee\{f(a),f(b)\}.\end{aligned}$$

即$f(a)\leqslant_2 f(b)$．所以，f是保序映射．

因此，命题(3.7.9)充分性条件中保定向并已蕴涵保序性．

§3.8 凝聚空间与Stone空间

(3.8.1)**定义** 设$(X,\Omega(X))$是拓扑空间.若$(X,\Omega(X))$是Sober空间,并且locale $\Omega(X)$是凝聚的,则称$(X,\Omega(X))$是凝聚空间.

设$(X,\Omega(X))$与$(Y,\Omega(Y))$都是凝聚空间,$f:X\longrightarrow Y$是拓扑空间之间的连续映射.若locale连续映射$\Omega(f):\Omega(X)\longrightarrow\Omega(Y)$是凝聚的,则称$f$是凝聚映射.

(3.8.2)**定理** 设L是凝聚locale,则$(pt^0L,\Omega pt^0L)$是凝聚空间.

证明 对于locale$L$,则根据定理(3.6.6)可知$(pt^0L,\Omega pt^0L)$是Sober空间.

因为locale L是凝聚的,根据定理(3.4.13)则知locale L是空间式的,即

$$\Phi^\circ:L\longrightarrow\Omega pt^0L$$

是双射.从而由定理(3.1.6)等可知Φ°是frame同构(即单满frame同态).于是由locale L是凝聚的可知:

(i) $K(\Omega pt^0L)=\Phi^\circ(K(L))$是$\Omega pt^0L$的子格;

(ii) Ωpt^0L的元均可表为$K(\Omega pt^0L)$的元之并.所以,locale Ωpt^0L是凝聚的.

综上所证,则知拓扑空间$(pt^0L,\ \Omega pt^0L)$是凝聚空间.

(3.8.3)**定理** 设D是分配格,则$(pt^0Idl(D),\Omega pt^0(Idl(D)))$是凝聚空间.

证明 对于分配格D,根据定理(3.4.9),则$Idl(D)$是凝聚locale.所以,由定理(3.8.2)可知$(pt^0Idl(D),\ \Omega pt^0(Idl(D)))$是凝聚空间.

(3.8.4)**定义** 设D是分配格,则凝聚空间$(pt^0Idl)(D)$,$\Omega pt^0(Idl(D)))$(或简记$pt^0Idl(D)$)称作分配格D的谱空间,记作Spec^0D.

(3.8.5)**定理**(关于分配格的Stone表示定理) 设$\boldsymbol{CohSp}$表示以凝聚空间为对象,以凝聚空间之间的凝聚连续映射为态射的范畴,称之为凝聚空间范畴,则分配格范畴$\boldsymbol{DLat}$与凝聚空间范畴

$CohSp$是对偶等价的，即范畴$DLat$与范畴$CohSp^{op}$是等价的

证明 根据定理(3.6.8)、定理(3.4.12)和定理(3.4.13)等即证。

(3.8.6) **定义** (i)若拓扑空间是Hausdorff的、凝聚的，则称之为Stone空间；

(ii) 若拓扑空间的全体开闭集构成其上拓扑的一组基，则称这拓扑空间是零维的；

(iii) 若拓扑空间中任意两点都有一个开闭集包含其中一点，而不含另一点，则称这拓扑空间为全分离的；

(iv) 若拓扑空间只有连通子集是单点集，则称这拓扑空间为全不连通的。

(3.8.7) **定理** 设$(X,\Omega(X))$是拓扑空间，则下列条件等价：

(i) $(X,\Omega(X))$是Stone空间；

(ii) $(X,\Omega(X))$是紧的、T_0的和零维的；

(iii) $(X,\Omega(X))$是紧的和全分离的；

(iv) $(X,\Omega(X))$是紧的、Hausdorff的和全不连通的。

证明 (i)$\Longrightarrow$(ii)设$(X,\Omega(X))$是*Stone*空间，即是Hausdorff的和凝聚的，则由$(X,\Omega(X))$是凝聚空间可知locale$\Omega(X)$是凝聚，从而$K\Omega(X)$对有限交封闭，于是$X\in K\Omega(X)$，即X是$\Omega(X)$的有限元，所以$(X,\Omega(X))$是紧空间。因为紧Hausdorff空间的紧子集是闭的，故知$K\Omega(X)$的元都是开闭集。但是，$\Omega(X)$是凝聚locale，于是$K\Omega(X)$构成$\Omega(X)$的一组基。所以$(X,\Omega(X))$是零维拓扑空间。综上所证，则知(ii)成立。

(ii)$\Longrightarrow$(iii)这是明显的。

(iii)$\Longrightarrow$(iv)设$S\subseteq X$，S不是单点集，则有$x_1,x_2\in S$，并且$x_1\neq x_2$。因为$(X,\Omega(X))$是全分离的拓扑空间，从而有开闭集G使得

$$x_1\in G \quad 与 \quad x_2\notin G.$$

令$K=X-G$，则K是开闭集，并且$G\cap K=\phi$。于是

$$S=S-(G\cap K)=(S-G)\cup(S-K)$$

与

$$(S-G)\cap(S-K)=\phi.$$

这表明S不是拓扑空间$(X,\Omega(X))$的连通子集. 所以, $(X,\Omega(X))$是全不连通空间.

若$x_1,x_2\in X$, 并且$x_1\neq x_2$, 则由 $(X,\Omega(X))$ 是全分离空间可知有开闭集G使得$x_1\in G$与$x_2\notin G$, 于是 $X-G$ 是开集, $x_2\in X-G$, 并且$G\cap(X-G)=\phi$. 所以, $(X,\Omega(X))$是Hausdorff空间.

综上所证, 则知(iv)成立.

(iv)$\Longrightarrow$(iii) 任取$x\in X$, 记$J(x)$表示X中与x点不能用开闭集分离的所有点作成的集, 则$J(x)$是闭集. 事实上, $\forall y\in X-J(x)$, 则由$J(x)$的定义可知有开闭集G_y满足:

$$y\in G_y,\quad X\notin G_y\text{与}G_y\subseteq X-J(x).$$

所以$X-J(x)=\bigcup G_y$ 即$J(x)$是闭集.

若$J(x)$含有多于一点, 则由题设$(X,\Omega(X))$是全不连通的空间可知$J(x)$是不连通的, 于是存在$J(x)$的不相交的非空(相对)闭子集F_1与F_2(但$J(x)$是X的闭子集, 故F_1与F_2也是X的闭子集), 使得$J(x)=F_1\cup F_2$. 因为$(X,\Omega(X))$是紧Hausdorff空间, 从而是正规空间, 故对于X的不相交闭子集F_1与F_2, 存在X的开子集G使得

$$F_1\subseteq G\quad\text{与}\quad\bar{G}\cap F_2=\phi.$$

记G的边界为$b(G)$, 则

$$b(G)=\bar{G}\cap(X-G),$$

于是

$$\begin{aligned}&b(G)\cap J(x)\\&=(F_1\cup F_2)\cap(\bar{G}\cap(X-G))\\&=[F_1\cap\bar{G}\cap(X-G)]\cup[F_2\cap\bar{G}_2\cap(X-G)]\\&=(\phi\cap\bar{G})\cup(\phi\cap(X-G))\\&=\phi.\end{aligned}$$

因为$b(G)$不交$J(x)$, 从而对于$y\in b(G)$, 由$J(x)$定义可知: 存在X的开闭集V_y, 使得

$$y \in V_y, \quad x \notin V_y \text{与} V_y \subseteq X - J(x).$$

但是$b(G)$是紧子集（根据紧空间的闭子集是紧集），于是存在V_{y_1}，…，V_{y_n}，使得

$$b(G) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}.$$

记 $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$，显然$V$是开闭集，$x \notin V$与$V \cap J(x) = \phi$。令 $W = G - V = G - \bar{V}$，则W，$X - W$都是开闭集，并且

$$W \cap J(x) = G \cap J(x) = G \cap (F_1 \cup F_2) = F_1$$

与

$$(X - W) \cap J(x) \neq \phi.$$

即开闭集W，$(X - W)$都与$J(x)$相交。但是它们不能都含有x点，这与$J(x)$的定义矛盾。所以，$J(x)$不能含多于一点，即$J(x) = \{x\}$。这就证明了$(X, \Omega(X))$是全分离的拓扑空间，即(iii)成立。

(iii)$\Longrightarrow$(ii) 设$x_1, x_2 \in X$，并且$x_1 \neq x_2$。因为$(X, \Omega(X))$是全分离空间，从而有开闭集G使得

$$x_1 \in G, \quad x_2 \notin G.$$

于是$X - G$是开闭集，$x_2 \in X - G$与$G \cap (X - G) = \phi$。所以，$(X, \Omega(X))$是Hausdorff空间，当然也是T_0空间。

设$G \in \Omega(X)$，任取$x \in G$，因为$(X, \Omega(X))$是全分离空间，从而$\forall y \in X - G$，存在开闭集V_y使得$x \in V_y$与$y \notin V_y$。于是

$$\{X - V_y \mid y \in X - G\}$$

是$X - G$的开覆盖。但是$X - G$是紧子集（根据紧空间的闭子集是紧子集），故有有限子覆盖

$$X - V_{y_1}, \quad \cdots, \quad X - V_{y_n}$$

是$X - G$的覆盖，即

$$\begin{aligned} X - G &\subseteq (X - V_{y_1}) \cup \cdots \cup (X - V_{y_n}) \\ &= X - (V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_1}). \end{aligned}$$

令$V_x=\bigcap_{i}^{n}V_{y_i}$，则$V_x$是开闭集，并且$x\in V_x\subseteq G$。所以，$G=\bigcup_{x\in G}V_x$。这表明$(X, \Omega(X)))$是零维空间。

综上所证，则知(ii)成立。

(ii)$\Longrightarrow$(i)设$(X,\Omega(X))$是紧的、T_0的与零维的空间，则由(ii)$\Longrightarrow$(iii)证明中可知T_0的、零维的空间是全分离空间，由(iii)$\Longrightarrow$(iv)证明中可知全分离空间是Hausdorff空间。所以，由题设可知$(X,\Omega(X))$是 Hausdorff 空间。

因为在紧 Hausdorff 空间中紧子集是闭子集，从而$K\Omega(X)$的元都是开闭集。但$(X,\Omega(X))$是零维的，于是$K\Omega(X)$构成$\Omega(X)$的一组基。由于开闭集的有限交是开闭集，故知$K\Omega(X)$对有限交封闭。因此，它是$\Omega(X)$的子格。另外Hausdorff空间是Sober空间。所以，由上述可知$(X,\Omega X))$是凝聚空间。

综上所证，则知$(X, \Omega(X))$是Stone空间，即(i)成立。

(3.8.8)注 由定理(3.8.7)证明中可知：

(i) 全分离空间是Hausdorff的、全不连通的空间；

(ii) 零维的、T_0的空间是全分离空间；

另外易证：

(iii) 全不连通空间是T_1空间；

(iv) 零维的、T_0的空间是正则空间。

(3.8.9)定理 设D是分配格，则D的谱空间$Spec^0D=(pt^0(Idl(D)), \Omega pt^0(Idl(D)))$是 Hausdorff 空间当且仅当$D$是Boole代数。

证明 设分配格D的谱空间$Spec^0D$是 Hausdorff 空间，因为Hausdorff空间的紧子集是闭子集，于是$K\Omega pt^0(Idl(D))$是谱空间$Spec^0D$的全体开闭集之族。显然，$K\Omega pt^0(Idl(D))$是Boole代数。由于D是分配格，于是由定理(3.4.9)可知$Idl(D)$是凝聚locale。但是凝聚locale是空间式的(根据定理(3.4.13))，

从而

$$\Phi^0: Idl(D)\to \Omega pt^0(Idl(D))$$

是格同构. 由此可知作为$Idl(D)$的子格$K(Idl(D))$与$K\Omega pt^0(Idl(D))$是格同构, 但是D与$K(Idl(D))$是格同构(根据引理(3.4.8)与定理(3.4.9)), 所以D与$K\Omega pt^0(Idl(D))$是格同构, 即D为Boole代数.

反之, 设分配格D是Boole代数. 对于$P,Q\in Spec^0D$, 则P与Q都是$Idl(D)$的素元, 从而都是D的素理想(根据命题(2.7.3)). 设$P\neq Q$, 任取$a\in Q-P$, 则$a\in Q$与$a\notin P$.但因D是Boole代数, 从而由定理(2.6.10)可知$a'\notin Q$与$a'\in P$. 于是由$a\notin P$与$a'\notin Q$分别可得$\downarrow(a)\nleq P$与$\downarrow(a')\nleq Q$. 因此根据定理(3.1.8)可知

$$P\in\Phi^0(\downarrow(a))\text{与}Q\in\Phi^0(\downarrow(a')).$$

但是$\Phi^0(\downarrow(a))\cap\Phi^0(\downarrow(a'))$

$$=\Phi^0(\downarrow(a)\cap\downarrow(a'))$$
$$=\Phi^0(\downarrow(a\wedge a'))$$
$$=\phi.$$

所以, 由定理(3.1.7)可知$Spec^0D$是Hausdorff空间.

(3.8.10)**定理** 设B是Boole代数,则$Spec^0B$是Stone空间.

证明 根据定理(3.8.3)和定理(3.8.9)即证.

(3.8.11)**定理**(关于Boole代数的Stone表示定理) 设以Boole代数为对象, 以格同态为态射的范畴称作Boole代数范畴, 记作***Boole***, 又设以Stone空间为对象, 以凝聚连续映射为态射的范畴称作*Stone*空间范畴,记作***Stone***,则范畴***Boole***与范畴***Stone***是对偶等价的,即范畴***Boole***与范畴$\textbf{\textit{Stone}}^{op}$是等价的.

证明 由定理(3.8.5)与定理(3.8.9)等即证.

§3.9 C-理想与Frame的表示

由P.T.Johnstone引入的C-理想概念是Locale理论中的有

力工具．本节将介绍C-理想概念，以及讨论用C-理想表示frame的一般方法，在随后的一节中将看到这种表示法的一个具体应用，即确定Locale范畴中的乘积结构．

(3.9.1)定义 设A是交半格．

(i)设C是A上映射．若$\forall a\in A$，$C(a)$是$\downarrow(a)$的子集族，并且满足条件：

$\forall S\in C(a)$，$\forall b\in A$，当$b\leqslant a$时有$\{s\wedge b|s\in S\}\in C(b)$，(此条件称为$C$的交稳定性)，则称$C$是$A$上Couerge．这时，$\forall a\in A$，称$C(a)$为$a$的覆盖；

(ii)若C是A的Coverge，则称(A,C)为场；

(iii)设(A,C)是场，$I\subseteq A$．若I是下集，并且对于$a\in A$，存在$S\in C(a)$使得当$S\subseteq I$时就有$a\in I$，则称I是A的C-理想，A的全体C-理想之集记作$C\text{-}Idl(A)$．

由定义可知：若I是交半格A的C-理想，则$\forall a\in A$，$a\in I$当且仅当$\forall S\in C(a)$，$S\subseteq I$．

(3.9.2)例 设A是分配格．对于$a\in A$，令

$$C(a)=\{F|F\subseteq A,F\text{为有限集，并且}\bigvee F=a\},$$

则不难看出，C是A上Coverage，C的交稳定性恰好是A的分配律，并且A的C-理想恰好是在通常意义下A的理想．

设(A,C)是一个场．显然A的任意C-理想之族的交是C-理想，于是A的全体C-理想之族按集的包含关系赋序构成一个完备格．但是，C-理想之族的并不必是C-理想．事实上容易看出，若$\{J_i|i\in I\}$是A的C-理想之族，则有

$$\bigvee_{C\text{-}Idl(A)}\{J_i|i\in I\}=\bigcap\{J|J\in C\text{-}Idl(A),\ \bigcup_{i\in I}J_i\subseteq J\}.$$

为使用上的方便，引入下列记号，设A是交半格，对于A的任意子集X,Y，记

$$X\wedge Y=\{x\wedge y|x\in X,y\in Y\}$$

与

$$(X:Y)=\{z\in A|z\wedge Y\subseteq X\}.$$

(3.9.3)引理 设A是交半格，又设$X,Y,Z\subseteq A$，则

(i) $Z\subseteq(X:Y)\Longleftrightarrow Y\wedge Z\subseteq X\Longleftrightarrow Y\subseteq(X:Z)$；

(ii)若X,Y都是下集，则$X\wedge Y=X\cap Y$。

证明 直接的验证。

(3.9.4)**定理** 对于任意场(A,C)，则$C\text{-}Idl(A)$是frame。

证明 已知$C\text{-}Idl(A)$是完备格，并且其内的交运算为集的交。因此，只需验证无限分配律。若$I,J\in C\text{-}Idl(A)$，则由引理(3.9.3)(ii)可知

$$I\wedge J=I\cap J\in C\text{-}Idl(A).$$

此外，若$I\in C\text{-}Idl(A)$，$X\subseteq A$，则有

$$(I:X)\in C\text{-}Idl(A).$$

事实上，显然$(I:X)$是下集；再设对于$a\in A$，存在$S\in C(a)$使得$S\subseteq(I:X)$，则由引理(3.9.3)(i)可得$S\wedge X\subseteq I$。换言之，

$$\forall x\in X,\ x\wedge S=\{x\wedge s\mid s\in S\}\subseteq I.$$

由于$\forall s\in S$，$s\leqslant a$，故根据交稳定性，有

$$\forall s\in X,\ x\wedge S=\{x\wedge s\mid s\in S\}\in C(x\wedge a).$$

但I是C-理想，从而

$$\forall x\in X,\ x\wedge a\in I,$$

即$a\wedge X\subseteq I$。于是由引理(3.9.3)(i)可知$a\in(I:X)$。所以，$(I:X)\in C\text{-}Idl(A)$。

现在，对于固定的$I\in C\text{-}Idl(A)$，有保序映射

$$I\cap(-):C\text{-}Idl(A)\longrightarrow C\text{-}Idl(A)$$
$$J\longmapsto I\cap J=I\wedge J$$

与 $((-):I):C\text{-}Idl(A)\longrightarrow C\text{-}Idl(A)$

$$J\longmapsto(J:I).$$

根据引理(3.9.3)(i)，则对于J，$K\in C\text{-}Idl(A)$，有

$$I\cap J\subseteq K\Longleftrightarrow J\subseteq(K:I).$$

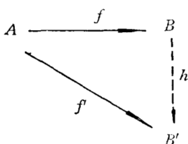
因此，映射$I\cap(-)$有右伴随$((-):I)$。所以，由伴随函子定理可知$I\cap(-)$保任意并，即在$C\text{-}Idl(A)$中无限分配律成立。

(3.9.5)**定义** 设(A,C)是一个场。

(i) 设B是格，$f:A\to B$是交半格同态，若满足条件：

$$\forall a\in A,\ \ \forall S\in C(a),\ f(a)=\bigvee_B\{f(s)\mid s\in S\},$$

则称f将覆盖变换成并。



图(3.9.1)

(ii) 设B是frame，若存在一个将覆盖变换成并的交半格同态$f:A\to B$，具有如下的泛性质：对任意frame B'以及任意将覆盖变换成并的交半格同态$f':A\to B'$，存在唯一的frame同态$h:B\to B'$，使得$hf=f'$(参考图(3.9.1))，则称B是由场(A,C)自由生成的。

(3.9.6)**例** 设场(A,C)的定义如例(3.9.2)。若B是任意格，$f:A\to B$是交半格同态，则f将覆盖变换成并当且仅当f是格同态。此外，由场(A,C)自由生成的frame就是$C\text{-}Idl(A)=Idl(A)$。这启发了下列更一般的结论：

(3.9.7)**定理** 对于任意场(A,C)，则由(A,C)自由生成的frame是$C\text{-}Idl(A)$。

证明 注意，由泛性质可知，自由生成的frame如果存在，则(在格同构意义下)必是唯一的。

由定理(3.9.4)可知$C\text{-}Idl(A)$是frame。定义映射$f:A\to C\text{-}Idl(A)$如下：

$$\forall a\in A,\ f(a)=\bigcap\{I\mid I\in C\text{-}Idl(A),\ a\in I\},$$

即，$f(a)$是包含a的最小C-理想(或者说是由a生成的C-理想)。下面分三个步骤证明f满足定理的要求。

(i) $f:A\to C\text{-}Idl(A)$是交半格同态。

事实上，由定义显然f是保序的，假定$x,y\in A$，则

$$\{x\}\wedge\{y\}=\{x\wedge y\}\subseteq f(x\wedge y)$$

$$\Longrightarrow\{y\}\subseteq(f(x\wedge y):\{x\})\qquad\text{(根据引理(3.9.3)(i))}$$

$$\Longrightarrow f(y)\subseteq(f(x\wedge y):\{x\})\qquad (\text{根据}(f(x\wedge y):\{x\})\in C\text{-}Idl(A))$$

$$\Longrightarrow \{x\}\subseteq(f(x\wedge y):f(y))$$

$$\Longrightarrow f(x)\subseteq(f(x\wedge y):f(y))$$

$$\Longrightarrow f(x)\wedge f(y)\subseteq f(x\wedge y).$$

再由保序性即知

$$f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)=f(x)\cap f(y).$$

所以，f 是交半格同态.

(ii)f 将覆盖变换成并.

设$a\in A$，$S\in C(a)$，若$I\in C\text{-}Idl(A)$，$S\subseteq I$，则$a\in I$，即

$$a\in\bigcap\{I\mid I\in C\text{-}Idl(A),\ S\subseteq I\}=(S),\qquad (1)$$

此处，(S)表示由集S生成的C-理想．此外，对于$S\subseteq I,S\in C(a)$，有$\forall s\in S$，$f(s)\subseteq I$，从而

$$\bigcup\{f(s)\mid s\in S\}\subseteq I.$$

因 I是C-理想，于是

$$\bigvee_{C\text{-}Idl(A)}\{f(s)\mid s\in S\}\subseteq I,$$

但I是任意的，故对于$S\in C(a)$，有

$$\bigvee_{C\text{-}Idl(A)}\{f(s)\mid s\in S\}\subseteq\bigcap\{I\mid I\in C\text{-}Idl(A),\ S\subseteq I\}=(S).$$

由于(S)是包含S的最小C-理想，并且

$$S\subseteq\bigcup\{f(s)\mid s\in S\}\subseteq\bigvee_{C\text{-}Idl(A)}\{f(s)\mid s\in S\}.$$

所以，对于$S\in C(a)$，有

$$(S)=\bigvee_{C\text{-}Idl(A)}\{f(s)\mid s\in S\}.\qquad (2)$$

将(1)与(2)结合得出

$$f(a)\subseteq(S)=\bigvee_{C\text{-}Idl(A)}\{f(s)\mid s\in S\}.$$

另一个方向的包含关系由f的保序性即证.

(iii)f 具有泛性质.

设B是任意 frame，$g:A\to B$ 是任意将覆盖变换成并的交半格同态．定义映射$h:C\text{-}Idl(A)\to B$如下：

$$\forall I\in C\text{-}Idl(A),\ h(I)=\bigvee_B\{g(x)\mid x\in I\}.$$

设 I，$J\in C\text{-}Idl(A)$，则有

$$h(I)\wedge h(J)=\bigvee_B\{g(x)\mid x\in I\}\wedge\bigvee_B\{g(y)\mid y\in J\}$$
$$=\bigvee_B\{g(x)\wedge g(y)\mid x\in I,\ y\in J\}$$
（根据B是frame）
$$=\bigvee_B\{g(x\wedge y)\mid x\wedge y\in I\wedge J\}$$
（根据g是交半格同态）
$$=\bigvee_B\{g(z)\mid z\in I\wedge J\}$$
$$=\bigvee_B\{g(z)\mid z\in I\cap J\}\text{（根据引理(3.9.3)(ii)）}$$
$$=h(I\cap J).$$

所以，h保有限交.

再设 $\forall \alpha\in\Gamma$，$I_\alpha\in C\text{-}Idl(A)$，令

$$a=\bigvee_B\{h(I_\alpha)\mid \alpha\in\Gamma\},$$

则

$$a=\bigvee_B\{h(I_\alpha)\mid \alpha\in\Gamma\}$$
$$=\bigvee_B\{\bigvee_B\{g(x)\mid x\in I_\alpha\}\mid \alpha\in\Gamma\}$$
$$=\bigvee_B\{g(x)\mid x\in I_\alpha,\ \alpha\in\Gamma\}$$
$$=\bigvee_B\{g(x)\mid x\in \bigcup_{\alpha\in\Gamma}I_\alpha\}.$$

令

$$K=\{x\in A\mid g(x)\leqslant a\},$$

则显然K是下集．另外，对于 $b\in A$，$S\in C(b)$，若 $S\subseteq K$，则 $\forall s\in S$，$g(s)\leqslant a$．由于g将覆盖变换成并，从而

$$g(b)=\bigvee_B\{g(s)\mid s\in S\}\leqslant a,$$

即$b\in K$．于是$K\in C\text{-}Idl(A)$.

由a的定义，则有$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}I_\alpha\subseteq K$，从而$\bigvee_{\alpha\in\Gamma}I_\alpha\subseteq K$．即$\forall x\in\bigvee_{\alpha\in\Gamma}I_\alpha$，$g(x)\leqslant a$．因此，

$$a=\bigvee_B\{g(x)\mid x\in\bigcup_{\alpha\in\Gamma}I_\alpha\}\leqslant\bigvee_B\{g(x)\mid x\in\bigvee_{\alpha\in\Gamma}I_\alpha\}\leqslant a.$$

换言之，

$$h(\bigvee_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha)=\bigvee_B\{g(x)\mid x\in\bigvee_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha\}$$
$$=\bigvee_B\{h(I_\alpha)\mid \alpha\in\Gamma\}.$$

所以，h保任意并．综上所证，则知h是frame同态．

最后验证$hf=g$．因为$\forall a\in A$，$a\in f(a)$，从而

$$g(a)\leqslant\bigvee_B\{g(x)\mid x\in f(a)\},$$

并且集$I=\{x\in A\mid g(x)\leqslant g(a)\}$是$C$-理想．若$x\in f(a)$，则由$a\in I$可知$f(a)\subseteq I$．于是$x\in I$，即$g(x)\leqslant g(a)$．因此，

$$\bigvee_B\{g(x)\mid x\in f(a)\}\leqslant g(a).$$

所以，

$$\forall a\in A,\ g(a)=\bigvee_B\{g(x)\mid x\in f(a)\}.$$

现在，$\forall a\in A$，有

$$hf(a)=h(f(a))=\bigvee_B\{g(x)\mid x\in f(a)\}$$
$$=g(a).$$

这表明$hf=g$，并且易见这样的h是唯一的．证毕

§3.10 Frame范畴中的乘积与余积

本节讨论Frame范畴中的乘积与余积的结构，其中乘积是简单而直接的，余积构造却复杂得多．由于Locale范畴是Frame范畴的对偶范畴，因此Frame范畴中的乘积与余积分别相应于Locale范畴中的余积与乘积．因为Locale范畴又可以视为一种"广义拓扑空间范畴"，所以在Locale范畴的乘积构造(即Frame范畴的余积构造)中包含了乘积空间的Tychonof拓扑的一些思想．

设$\{A_r\mid r\in\Gamma\}$是一族frame，其卡氏积$E=\prod\{A_r\mid r\in\Gamma\}$赋以逐点序后，也是frame．设对于$\delta\in\Gamma$，

$$p_\delta:E\to A_\delta$$

是标准投影映射，即$\forall\{a_r\}_{r\in\Gamma}\in E$，有

$$p_\delta(\{a_r\}_{r\in\Gamma})=a_\delta.$$

显然，$\forall \delta \in \Gamma$，$p_\delta$是frame同态.

（3.10.1）**定理** 设$\{A_r \mid r \in \Gamma\}$是一族frame，则$(\prod\{A_r \mid r \in \Gamma\}, \{p_r \mid r \in \Gamma\})$是该族在Frame范畴中的乘积.

证明 设B是任意frame，并且$\forall r \in \Gamma$，

$$f_r: B \to A_r$$

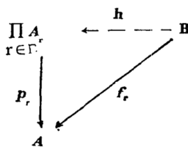
是frame同态。定义frame同态

$$h: B \to \prod\{A_r \mid r \in \Gamma\}$$

如下：$\forall b \in B$，

$$h(b) = \{f_r(b)\}_{r \in \Gamma},$$

则容易看到，$\forall r \in \Gamma$，$p_r h = f_r$，并且这样的h是唯一的。证毕.



图(3.10.1)

本节的余下部分将讨论Frame范畴中的余积构造. 引入一些记号如下：

如前一样，设$\{A_r \mid r \in \Gamma\}$是一族Frame，$E = \prod\{A_r \mid r \in \Gamma\}$是直积(赋以逐点序)。对于$r \in \Gamma$，则标准投影映射

$$p_r: E \to A_r$$

有右伴随

$$q_r: A_r \to E,$$

定义如下：$\forall a_r \in A_r$，$q_r(a_r) \in E$满足

$$p_r(q_r(a_r)) = a_r \quad 与 \quad p_\delta(q_r(a_r)) = 1 (\delta \neq r).$$

即$q_r(a_r)$是$\prod\{A_r \mid r \in \Gamma\}$中第$r$个“坐标”为$a_r$，其余“坐标”均为1的元。令$A$是由所有$q_r$的象的并集在$E$中生成的子交半格，即

$$A=\{e\in E \mid \exists r_1, \cdots, r_n\in \Gamma, a_{r_i}\in A_{r_i},$$
$$e=q_{r_1}(a_{r_1})\wedge\cdots\wedge q_{r_n}(a_{r_n})\}$$
$$=\{e\in E \mid \text{除有限个}r\in\Gamma\text{外，有}p_r(e)=1\}.$$

A是由E的子集$\{q_r(a_r)\mid r\in\Gamma, a_r\in A_r\}$中元的一切有限交构成的交半格。显然，$\forall r\in\Gamma$，$q_r(A_r)\subseteq A$，于是$q_r: A_r\to A$是交半格同态。

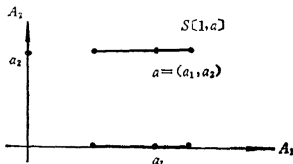
(3.10.2)**引理** 设$\{A_r\mid r\in\Gamma\}$是一族frame，A的意义如上所述，则$(A, \{q_r\mid r\in\Gamma\})$是该族在范畴$\boldsymbol{SLat}$(即以交半格为对象，以交半格同态为态射的范畴)中的余积。

证明 直接验证。

如前所述，对于$a\in A$，$S\subseteq A_r(r\in\Gamma)$，记

$$S[r, a]=\{x\in A\mid p_r(x)\in S;\ \text{当}\delta\neq r\text{时，}p_\delta(x)=p_\delta(a)\},$$
$$C(a)=\{S[r, a]\mid r\in\Gamma, S\subseteq A_r\text{与}\bigvee S=p_r(a)\}.$$

当$\Gamma=\{1,2\}$的情形如图(3.10.2)所示：



图(3.10.2)

(3.10.3)**引理** 如上定义的C是交半格A上Coverge。

证明 设$a\in A$，$r\in\Gamma$与$S\subseteq A_r$。对于$x\in A$，若$x\in S[r, a]\in C(a)$，则

$$p_r(x)\in S\quad\text{与}\quad\text{当}\delta\neq r\text{时，}p_\delta(x)=p_\delta(a).$$

从而$p_r(x)\leqslant\bigvee S=p_r(a)$，于是

$$x=\{p_r(x)\}_{r\in\Gamma}\leqslant\{p_r(a)\}_{r\in\Gamma}=a.$$

即 $S[r,\ a]\subseteq\downarrow(a)$。所以，$C(a)$是$\downarrow(a)$的子集族。

以下验证 C 的交稳定性：设$a,b\in A,b\leqslant a$与$S[r,a]\in C(a)$，则$\forall x\in S[r,a]$，有

$$p_r(x\wedge b)=p_r(x)\wedge p_r(b)\in p_r(b)\wedge S$$

与当$\delta\in\Gamma$，$\delta\neq r$时，有

$$\begin{aligned}p_\delta(x\wedge b)&=p_\delta(x)\wedge p_\delta(b)\\&=p_\delta(a)\wedge p_\delta(b)\\&=p_\delta(a\wedge b)\\&=p_\delta(b).\end{aligned}$$

令

$$S'=\{p_r(b)\wedge s\mid s\in S\}=p_r(b)\wedge S,$$

则$S'\subseteq A_r$，并且

$$\begin{aligned}\bigvee S'&=\bigvee\{p_r(b)\wedge s\mid s\in S\}\\&=p_r(b)\wedge\bigvee S\\&=p_r(b)\wedge p_r(a)\\&=p_r(b).\end{aligned}$$

所以，$\{x\wedge b\mid x\in S[r,\ a]\}=S'[r,\ b]\in C(b)$。证毕。

(3.10.4)引理　设(A,C)是如前定义的场，B是任意frame，$f:A\to B$是交半格同态，则f将覆盖变换成并 当且仅当$\forall r\in\Gamma$，

$$fq_r:A_r\to B$$

保任意并。

证明　设f将覆盖变换成并，即$\forall a\in A$，$r\in\Gamma$，$S\subseteq A_r$与$\bigvee S=p_r(a)$，有

$$f(a)=\bigvee_B\{f(x)\mid x\in S[r,\ a]\}.$$

注意，由于f(以及每个q_r)都保有限交，所以只需就 A 的基本元(即形为$q_r(a_r)$的元，其中$a_r\in A_r$)讨论即可。

对于$r\in\Gamma$，$S\subseteq A_r$，令$a_r=\bigvee S$，则

$$S[r,\ q_r(a_r)]\in C(q_r(a_r)).$$

于是由假设有

$$
\begin{aligned}
f(q_r(a_r)) &= \bigvee_B\{f(x)\mid x\in S[r,\ q_r(a_r)]\}\\
&= \bigvee_B\{f(q_rp_r(x))\mid x\in S[r,\ q_r(a_r)]\}\\
&= \bigvee_B\{f(q_r(p_r(x)))\mid p_r(x)\in S\}\\
&= \bigvee_B\{fq_r(s)\mid s\in S\}.
\end{aligned}
$$

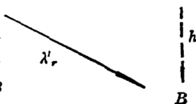
所以，fq_r保任意并.

反之，设 $\forall r\in\Gamma$，$fq_r: A_r\to B$ 保任意并，则对于 $r\in\Gamma$，$S\subseteq A_r$与$\bigvee S=a_r$，有

$$
\begin{aligned}
&\bigvee_B\{f(x)\mid x\in S[r,\ q_r(a_r)]\}\\
&= \bigvee_B\{f(x)\mid p_\delta(x)=1(\delta\neq r),\ p_r(x)\in S,\ \bigvee S=a_r\}\\
&= \bigvee_B\{f(q_r(p_r(x)))\mid p_\delta(x)=1(\delta\neq r),\ p_r(x)\in S,\\
&\qquad\qquad \bigvee S=a_r\}\\
&= (fq_r)(\bigvee_{A_r}\{p_r(x)\mid p_\delta(x)=1(\delta\neq r),\ p_r(x)\in S,\\
&\qquad\qquad \bigvee S=a_r\}\\
&= (fq_r)(\bigvee S)\\
&= (fq_r)(a_r)\\
&= f(q_r(a_r)).
\end{aligned}
$$

所以，f 将覆盖变换成并.

(3.10.5)定理 设$\{A_r\mid r\in\Gamma\}$是一族frame，$(A,\ C)$是如前定义的场，则$C\text{-}Idl(A)$是frame族$\{A_r\mid r\in\Gamma\}$在Frame范畴中的余积(对象).



图(3.10.3)

证明 必须证明对于$r\in\Gamma$存在frame同态$\lambda_r: A_r\to C\text{-}Ild(A)$具有如下泛性质：任给frame$B$与frame同态$\lambda'_r: A_r\to B$ $(\forall r\in\Gamma)$，则存在唯一的frame同态$h: C\text{-}Idl(A)\to B$，使得

$$\forall r\in\Gamma,\ h\lambda_r=\lambda'_r.$$

设任意给定 frame B 与 frame 同态 $\lambda'_r: A_r\to B$，则对于场

(A, C)，记

$$f: A \to C\text{-}Idl(A)$$

表示在定理(3.9.7)证明中将覆盖变换成并的交半格同态．对于 $r \in \Gamma$，令 $\lambda_r = f q_r$，则

$$\lambda_r: A \to C\text{-}Idl(A)$$

是交半格同态，并且由引理(3.10.4)可知 λ_r 保任意并．于是 $\forall r \in \Gamma$，λ_r 是frame同态．

考虑图(3.10.4)，则由引理(3.10.2)可知存在交半格同态

$$g: A \to B,$$

使得 $\forall r \in \Gamma$，$\lambda'_r = g q_r$．但是假设 $\forall r \in \Gamma$，λ'_r 是frame同态，从而 $g q_r = \lambda'_r$ 保任意并，于是根据引理(3.10.4)，则 g 将覆盖变换成并．再由定理(3.9.7)可知存在frame同态

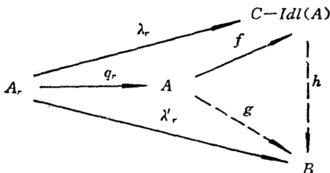
$$h: C\text{-}Idl(A) \to B,$$

使得 $hf = g$．所以，$\forall r \in \Gamma$，有

$$h\lambda_r = h(fg_r) = (hf)g_r = gq_r = \lambda'_r.$$

即图(3.10.4)可交换，易见这样的 h 是唯一的．

综上所证，则知 $(C\text{-}Idl(A), \{\lambda_r | r \in \Gamma\})$ 是Frame范畴中的余积．



图(3.10.4)

(3.10.6)注　若将 $\{A_r | r \in \Gamma\}$ 视为locale之族，则由对偶性可知，$C\text{-}Idl(A)$ 是该族在Locale范畴中的乘积对象，记作

$\prod_l\{A_r|r\in\Gamma\}$。此时相对应的locale连续映射

$$\lambda_r^{op}:\prod_l\{A_r|r\in\Gamma\}\to A_r$$

起着“自然投影”的作用.

(3.10.7)**例** 设A_1,A_2都是locale．现在具体分析一下$A=\prod_l\{A_i|i=1,2\}$的组成。对于$a=(a_1,a_2)\in A$，若$S\subseteq A_1,\bigvee S=a_1$，则

$$S[1,a]=S\times\{a_2\}.$$

同理，若$T\subseteq A_2$，$\bigvee T=a_2$，则

$$T[2,a]=\{a_1\}\times T.$$

于是

$$C(a)=\{S\times\{a_2\}|S\subseteq A_1,\ \bigvee S=a_1\}\ \cup\{\{a_1\}\times T|T\subseteq A_2,\ \bigvee T=a_2\}.$$

容易看到，下集$I\subseteq A_1\times A_2$是C-理想(即A的元)当且仅当对于$B_1\subseteq A_1$与$B_2\subseteq A_2$，若$B_1\times B_2\subseteq I$，则$(\bigvee B_1,\bigvee B_2)\in I$.

(3.10.8)**注** 应该指出，locale的乘积构造不是一般拓扑学中乘积拓扑的推广.即,给定拓扑空间之族$\{X_r|r\in\Gamma\}$，则locale $\Omega(\prod\{X_r|r\in\Gamma\})$一般不同构于locale $\prod_l\{\Omega(X_r)|r\in\Gamma\}$.但是，这两个locale仍然有密切联系.

(3.10.9)**命题** 设$\{X_r|r\in\Gamma\}$是拓扑空间之族，则$\prod\limits_{r\in\Gamma}X_r$同胚于$pt(\prod_l\{\Omega(X_r)|r\in\Gamma\})$.由此可知,locale $\Omega(\prod\{X_r|r\in\Gamma\})$同构于locale $\prod_l\{\Omega(X_r)|r\in\Gamma\}$当且仅当后者是空间式的.

§3.11 Frame范畴的一些相关范畴

(3.11.1)**定义** 若完备格A满足第二无限分配律(即$\forall a\in A$,$\forall S\subseteq A$有$a\vee\bigwedge S=\bigwedge\{a\vee s|s\in S\}$)，则称$A$为余frame.对于余frame之间的映射$f:A\to B$，若$f$保有限并与保任意交，则称$f$为余frame同态.

以余 frame 为对象，以余 frame 同态为态射的范畴，称之为余Frame范畴，记作$\boldsymbol{CoFrm}$. 显然，范畴CoFrm与范畴$\boldsymbol{Frm}$是同构的，于是对偶同构于范畴$\boldsymbol{Loc}$.

以$\boldsymbol{CoFrm_*}$表示下列范畴：$\boldsymbol{CoFrm_*}$中对象为余frame，余frame之间的映射$f: A\to B$是$\boldsymbol{CoFrm_*}$中态射当且仅当f保意并，并且其右伴随$f_*: B\to A$保有限并.

(3.11.2) **定理** 范畴$\boldsymbol{CoFrm_*}$同构于Locale范畴$\boldsymbol{Loc}$.

证明 记范畴$\boldsymbol{CoFrm}$的对偶范畴为$\boldsymbol{D}$.显然，范畴$\boldsymbol{D}$与范畴$\boldsymbol{Loc}$同构.所以，为证本定理只需证明范畴$\boldsymbol{CoFrm_*}$同构于范畴$\boldsymbol{D}$.

设$f\in Hom_{CoFrm_*}(A,B)$，则映射$f: A\to B$的右伴随$f_*: B\to A$保任意交与保有限并，即$f_*\in Hom_D(A,B)$. 反之，设$g\in Hom_D(A, B)$，则映射$g: B\to A$保任意交与保有限并.于是映射g有左伴随$g^*: A\to B$. 显然，$g^*\in Hom_{CoFrm_*}(A,B)$. 命函子

$$F: \boldsymbol{CoFrm_*}\to \boldsymbol{D}$$

使得$\forall A\in ob(\boldsymbol{CoFrm_*}), FA=A$，并且$\forall f\in Hom_{CoFrm_*}(A,B)$，$F(f)=f_*$. 又命函子

$$G: \boldsymbol{D}\to \boldsymbol{CoFrm_*}$$

使得$\forall A\in ob(\boldsymbol{D})$，$GA=A$，并且$\forall g\in Hom_D(A,B)$，$G(g)=g^*$.容易验证：$F$与$G$确是函子，并且$GF=id_{CoFrm_*}$与$FG=id_D$这表明范畴$\boldsymbol{CoFrm_*}$同构于范畴$\boldsymbol{D}$.

(3.11.3) **定义** 设A是frame，A'是A的子frame（即$A'\subseteq A$，并且A'对于A中的任意并与有限交都封闭)，则称序偶(A,A')是frame偶.设(A,A')与(B,B')都是frame偶，$f: A\to B$是frame同态，若$f(A')\subseteq B'$，则称

$$f: (A,A')\to (B,B')$$

为frame偶同态. 以frame偶为对象，以frame偶同态为态射构成一个范畴，称作frame偶范畴，记作$\boldsymbol{FrmPair}$.

(3.11.4) **注** 若将frame$A$与frame偶(A,A)等同，则$\boldsymbol{Frm}$

可视为$\boldsymbol{FrmPair}$的满子范畴。

(3.11.5) **定义** 设A是完备格，$\eta\subseteq A$。若η对于A中的任意交与有限并都封闭，则称η是A上余拓扑。

设$\boldsymbol{CoFCoT}$表示下列范畴：$\boldsymbol{CoFCoT}$中对象是余frame(即满足第二无限分配律的完备格) A与其上一个余拓扑η的序偶(A,η)，并且对于$(A,\eta_1),(B,\eta_2)\in ob(\boldsymbol{CoFCoT})$，$f\in Hom_{CoFCoT}((A,\eta_1),(B,\eta_2))$当且仅当$f\in Hom_{CoFrm_*}(A,B)$与$f_*(\eta_2)\subseteq\eta_1$。此处$\boldsymbol{CoFrm_*}$是(3.11.1)定义的范畴，范畴$\boldsymbol{CoFCoT}$中态射的复合就是它们作为映射的复合。

(3.11.6) **定理** 范畴$\boldsymbol{CoFCoT}$对偶同构于范畴$\boldsymbol{FrmPair}$。即范畴$\boldsymbol{CoFCoT}$同构于范畴$\boldsymbol{FrmPair}^{op}$。

证明 设$\boldsymbol{E}$表示下述范畴：$\boldsymbol{E}$中对象是形如(A,A')的序偶，此处A是满足第二无限分配律的完备格(即余frame)，$A'\subseteq A$，并且A'对于A中的任意交与有限并封闭；又对于$\boldsymbol{E}$中对象(A,A')与(B,B')，则$f\in Hom_E((A,A'),(B,B'))$当且仅当$f:A\to B$是保任意交与保有限并的映射，并且$f(A')\subseteq B'$。显然，范畴$\boldsymbol{E}$(也称作余frame偶范畴，并且记作$\boldsymbol{CoFrmPair}$)与范畴$\boldsymbol{FrmPair}$同构。所以，为证本定理只需证明范畴$\boldsymbol{CoFCoT}$对偶同构于范畴$\boldsymbol{E}$。

设$f\in Hom_{CoFCoT}((A,\eta_1),(B,\eta_2))$，则由定理(3.11.2)的证明可知映射$f:A\to B$的右伴随$f_*:B\to A$保任意交与保有限并。又$f_*(\eta_2)\subseteq\eta_1$。所以，$f_*\in Hom_E((B,\eta_2),(A,\eta_1))$。反之，设$g\in Hom_E((A,A'),(B,B'))$，则由定理(3.11.2)的证明可知映射$g:A\to B$有左伴随$g^*:B\to A$。由此易见：$g^*\in Hom_{CoFCoT}((B,B'),(A,A'))$。命函子

$$F:\boldsymbol{CoFCoT}\to\boldsymbol{E}$$

使得$\forall(A,\eta)\in ob(\boldsymbol{CoFCoT})$，$F(A,\eta)=(A,\eta)$，并且$\forall f\in Hom_{CoFCoT}((A,\eta_1),(B,\eta_2))$，$F(f)=f_*$。又命函子

$$G:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{CoFCoT}$$

使得$\forall (A,A')\in ob(\mathbf{E})$，$G(A,A')=(A,A')$，并且$\forall g\in Hom_{\mathbf{E}}((A,A'),(B,B'))$，$G(g)=g^*$。容易验证：$F$与$G$都是反变函子，$GF=id_{\mathbf{CoFCoT}}$与$FG=id_{\mathbf{E}}$。这表明范畴$\mathbf{CoFCoT}$对偶同构于范畴$\mathbf{E}$。

(3.11.7)注　根据本节结果，farme范畴与一些相关范畴的关系如下(图(3.11.1))：

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{FrmPair} & \supseteq & \mathbf{Frm} & \underset{OP}{\cong} & \mathbf{Loc} \\
\wr\| \, op & & \wr\| \, op & & \| \\
\mathbf{CoFCoT} & \supseteq & \mathbf{CoFrm} & \cong & \mathbf{Loc}
\end{array}
$$

图 (3.11.1)

此处“$\cong$”，“$\underset{op}{\cong}$”与“$\supseteq$”分别表示“同构”，“对偶同构”与“以……为子范畴”。

显然，文献[147]中的分子格范畴与拓扑分子格范畴分别是范畴$\mathbf{CoFrm}_*$与范畴$\mathbf{CoFCoT}$的子范畴。

第4章 连续格理论

连续格理论是在70年代初期由几位在不同领域中工作的数学家几乎同时建立与发展的，其中*D.S.Scott*的基本文献[114]发表后，对这一理论的发展起了极大推动作用。目前，连续格理论（以及一般的连续偏序集理论）与理论计算机科学的关系极为密切，并且有许多新的理论与实际问题有待解决。从数学的角度看，连续格可以成为多个学科的研究对象。例如，从格论观点看，它是满足一种特定的分配律的完备格，是完全分配完备格的自然推广；从拓扑观点看，它是T_0空间范畴中的入射对象；从拓扑代数观点看，它是紧Lawson交半格；从范畴观点看，连续格范畴与Topos理论，特别是Locale理论有着紧密的联系。正因为其为多学科的研究特点，所以从70年代末期到80年代初期连续格理论的发展十分迅速，取得了一系列深刻的结果，文献相当丰富。特别值得重视的有专著[32]，专门文集[3，44，45]等。

本章着重介绍连续格理论中的两个主要部分，第一部分以连续偏序集的Lawson-Hoffmann理论为核心，采用我国数学家近年来所强调的极小集方法讨论连续偏序集与完全分配格之间的关系；第二部分则集中连续格数学理论中的几个基本结果，通过这些结果具体地明确连续格与*Locale*、*Lawson*交半格和T_0空间范畴之间的联系。

§4.1 拓扑偏序集

(4.1.1) **定义** 若拓扑空间又是偏序集，则称之为拓扑偏序集(或偏序空间)。

在本章中，拓扑偏序集上的偏序关系一般用$\leqslant$表示之．前面已经涉及到拓扑偏序集的例子．例如，一个偏序集 X，带有由X上序诱导的Alexandrov 拓扑，则成为拓扑偏序集．若一个拓扑偏序集上的拓扑与偏序之间有一定的联系，则可以期望其上的拓扑或偏序将会有较好的性质．

设X是拓扑偏序集．若$\leqslant$是$X\times X$的闭子集，即集

$$E(\leqslant)=\{(x,y)\mid x,y\in X,\ x\leqslant y\}$$

关于$X\times X$上乘积拓扑为闭集，则称拓扑偏序集 X 是序Hausdorff的．

为明确起见，这里使用记号$E(\leqslant)$代替$\leqslant$．注意，$E(\leqslant)$作为$X\times X$的子集，有$E(\leqslant)=\leqslant$．

(4.1.2) **定理** 设X是拓扑偏序集，则X是序 Hausdorff 的当且仅当对于任意$x,y\in X$, $x\not\leqslant y$，存在x,y的不相交邻域U,V使得U是上集，V是下集（简称 U 是 x 的上邻域，V是 y 的下邻域）．

证明 设X 是序 Hausdorff 拓扑偏序集，又设$x, y\in X$, $x\not\leqslant y$，则$(x,y)\notin E(\leqslant)$．因为$E(\leqslant)$是闭集，于是存在(x,y)在$X\times X$中的开邻域$U_1\times V_1$，使得

$$(U_1\times V_1)\cap E(\leqslant)=\phi.$$

令

$$U=\uparrow(U_1),\ \ V=\downarrow(V_1),$$

则 U 是 x 的上邻域，V是y的下邻域．

假设$U\cap V\neq\phi$，则存在$u\in\uparrow(U_1)\cap\downarrow(V_1)$．即

$$存在u_1\in U_1,\ \ v_1\in V_1,\ \ 满足u_1\leqslant u\leqslant v_1.$$

从而$(u_1,v_1)\in E(\leqslant)$．但是这与$(U_1\times V_1)\cap E(\leqslant)=\phi$矛盾，所以$U\cap V=\phi$．

反之，设X满足定理中的条件，对于$x,y\in X$, $x\not\leqslant y$，则存在x, y的不交邻域U, V使得

$$U=\uparrow(U),\ \ V=\downarrow(V).$$

因为 U,V 都是邻域，于是$(x,y)\in \mathrm{int}(U)\times \mathrm{int}(V)$．若

$$(\mathrm{int}(U)\times\mathrm{int}(V))\cap E(\leqslant)\neq\phi,$$

则存在$(u,v)\in\mathrm{int}(U)\times\mathrm{int}(V)\subseteq U\times V$，满足$u\leqslant v$。但$V$是下集，从而$u\in U\cap V$。这与$U\cap V=\phi$矛盾，于是有

$$[\mathrm{int}(U)\times\mathrm{int}(V)]\cap E(\leqslant)=\phi,$$

即$E(\leqslant)$是闭集。所以，拓扑偏序集X是序Hausdorff的。

(4.1.3)**注**　根据定理(4.1.2)，显然可以得出：序Hausdorff拓扑偏序集必定是Hausdorff空间。另外，应该指出：定理(4.1.2)中的上邻域U和下邻域V都不一定是开集。然而，若附加假定X是紧空间，则可以保证U,V都是开集。见定理(4.1.5)。

(4.1.4)**命题**　设X是序Hausdorff拓扑偏序集，K是X的紧子集，则$\downarrow(K)$和$\uparrow(K)$都是闭集。

证明　先证明$\downarrow(K)$是闭集，设$x\in X-\downarrow(K)$，则$\forall k\in K$，$x\not\leqslant k$，即$(x,k)\notin E(\leqslant)$。因为假设X是序Hausdorff的，于是存在x,k的开邻域U_k，V_k使得

$$(U_k\times V_k)\cap E(\leqslant)=\phi. \tag{1}$$

显然有$U_k\cap V_k=\phi$。由K的紧性，则可知存在$k_1,\cdots,k_n\in K$，使得$\{V_{k_1},\cdots,V_{k_n}\}$覆盖$K$。令

$$U=U_{k_1}\cap\cdots\cap U_{k_n},$$

则U是x的开邻域，并且$U\cap K=\phi$。若

$$U\cap\downarrow(K)\neq\phi,$$

则存在$u\in U$，$k\in K$使得$u\leqslant k$。于是对某个$1\leqslant i\leqslant n$，有$k\in V_{ki}$，又$u\in U\subseteq U_{ki}$，即

$$(u,k)\in(U_{k_i}\times V_{k_i})\cap E(\leqslant).$$

这与(1)式矛盾。所以，$U\cap\downarrow(K)=\phi$，即$\downarrow(K)$是闭集。

$\uparrow(K)$为闭集的证明是类似的。

特别地，若X是序Hausdoff拓扑偏序集，则$\forall x\in X$，集$\downarrow(x)$和$\uparrow(x)$都是闭的。

(4.1.5)**定理**　设X是紧的序Hausdorff拓扑偏序集，又设

$x, y \in X$，$x \not\leqslant y$，则存在x, y的不相交开邻域U, V使得U是上集，V是下集。

证明 由于$x \not\leqslant y$，故$\downarrow(y)$和$\uparrow(x)$都是X的不相交闭集。因为X是正规的（根据X是紧Hausdorff的），从而存在不相交开集U_1, V_1满足：

$$\uparrow(x) \subseteq U_1, \quad \downarrow(y) \subseteq V_1.$$

令$U = X - \downarrow(X - U_1)$，$V = X - \uparrow(X - V_1)$。根据命题(4.1.4)，则$U$是开上集，$V$是开下集，$\uparrow(x) \subseteq U$与$\downarrow(y) \subseteq V$。此外，有

$$\begin{aligned} U \cap V &= [X - \downarrow(X - U_1)] \cap [X - \uparrow(X - V_1)] \\ &= X - [\downarrow(X - U_1) \cup \uparrow(X - V_1)] \\ &\subseteq X - [(X - U_1) \cup (X - V_1)] \\ &= X - [X - (U_1 \cap V_1)] \\ &= \phi. \end{aligned}$$

(4.1.6) **定义** 设X是拓扑偏序集。

(i) 设$C \subseteq X$，若对于$a, b \in C$与$x \in X$，当$a \leqslant x \leqslant b$时有$x \in C$，则称$C$为序凸集；

(ii) 若X有一个由序凸集构成的基，则称X为局部序凸的。

(4.1.7) **注** 设X是拓扑偏序集，又设$A, B \subseteq X$。若A是上集（或下集），则A是序凸的。此外，若A, B都是序凸的，则$A \cap B$也是序凸的。

(4.1.8) **定理**（局部凸性定理） 任意紧的序Hasdorff拓扑偏序集都是局部凸的。

证明 设X是紧的序Hausdorff拓扑偏序集，W是X的任意开集，并且$x \in W$。对于$y \in X - W$，则有$y \not\leqslant x$，或者$x \not\leqslant y$。于是由定理(4.1.5)可知存在开下集U_y与开上集V_y（或者开上集U_y与开下集V_y）满足：

$$x \in U_y, y \in V_y \text{ 与 } U_y \cap V_y = \phi.$$

因为$X - W$是闭集与X是紧空间，从而$X - W$也是紧的。故存在$y_1, \cdots y_n \in X - W$，使得$\{V_{y1}, \cdots V_{yn}\}$覆盖$X - W$。注意$V_{y_i}$及相

应的U_{y_i}或者是开上集或者是开下集(因而总是序凸开集).令

$$U=\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i}\text{与}V=\bigcup_{i=1}^{n}V_{y_i},$$

则U是x的序凸开邻域，并且$U\cap V=\phi$. 于是

$$x\in U\subseteq X-V\subseteq X-(X-W)\subseteq W.$$

所以，全体序凸开集构成X的拓扑基.

(4.1.9)注　事实上，由上述证明可以看出，X的一个由序凸开集构成的基为

$$\mathscr{B}=\{U\cap V\mid U\text{是开上集，}V\text{是开下集}\}.$$

(4.1.10)**定理**(单调收敛定理)　设X是紧的序Hausdorff拓扑偏序集，则

(i)若$S\subseteq X$是定向集，则S作为X中的网收敛于唯一的极限$\sup S$;

(ii)若$S\subseteq X$是余定向集，则S作为X中的网收敛于唯一的极限$\inf S$.

特别地，X必有定向并和余定向交.

证明　只需证明(i)，(ii)的证明是对偶的.

设$S\subseteq X$是定向集. 因为X是紧的，故作为X中的网S至少有一个聚点. 设a是S的一个聚点. 若存在$x\in S$，满足$x\not\leqslant a$，则由假设可知$X-\uparrow(x)$是a的开邻域，从而

$$S\cap(X-\uparrow(x))\neq\phi.$$

即存在$b\in S\cap(X-\uparrow(x))$. 由于$S$是定向集，故存在$c\in S$，使得

$$x\leqslant c,b\leqslant c.$$

现在$c\in S$，并且$a\in X-\uparrow(x)$是S的聚点，从而存在$d\in S$满足$d\in X-\uparrow(x)$，$c\leqslant d$，于是$x\leqslant c\leqslant d$. 这与$d\in X-\uparrow(x)$矛盾. 因此a是S的上界.

设b是S的另一上界，$a\not\leqslant b$，则$a\in X-\downarrow(b)$. 故存在$y\in S$满足$y\in X-\downarrow(b)$，即$y\not\leqslant b$. 这与b是S的上界相矛盾. 从而$a\leqslant b$，即$a=\sup S$. 由于a是S的任意聚点，故S的聚点是唯一

的.

设W是$a=\sup S$的任意开邻域. 根据局部凸性定理(4.1.8)和注(4.1.9), 则存在开上集U和开下集V, 满足$a\in U\cap V\subseteq W$. 因为a是网S的聚点, 故存在$s_0\in U\cap V$. 另一方面, $\forall s\in S$, 当$s\geqslant s_0$时, 有$a=\sup S\geqslant s\geqslant s_0$. 因为$U$是上集, $s_0\in U$, 于是$s\in U$; 因为V是下集, $a\in V$, 于是$s\in V$. 所以, $s\in U\cap V$. 即a是网S的极限.

§4.2 拓扑交半格

(4.2.1) **定义** 设A是交半格, 又是拓扑空间(即一类特殊的拓扑偏序集). 若A上拓扑使得交半格运算

$$\wedge: A\times A\to A$$

关于$A\times A$上的乘积拓扑连续, 则称A为拓扑交半格.

类似地, 可以定义拓扑并半格和拓扑格的概念. 拓扑交半格常简称为拓扑半格. 如无特别申明,本章中"半格"均是指交半格.

(4.2.2) **命题** 任意Hausdorff拓扑交半格都是序Hausdorff拓扑偏序集.

证明 设A是Hausdorff拓扑交半格(并半格情形是对偶的). 对于$(a,b)\in A\times A$, 令

$$f(a,b)=(a,a\wedge b),$$

则这样定义的映射

$$f: A\times A\to A\times A$$

是连续的. 由于A是Hausdorff空间, 则其对角线

$$\Delta=\{(a,a)\mid a\in A\}$$

是$A\times A$的闭集. 所以, 集

$$E(\leqslant)=\{(a,b)\mid a,b\in A,\ a\leqslant b\}$$
$$=f^{-1}(\Delta)$$

是$A\times A$的闭集. 即A是序Hausdorff的.

(4.2.3)**定理**　设A是紧Hausdorff拓扑交半格，则A是完备格，并且满足下列形式的分配律：对于任意$a\in A$与任意定向集$S\subseteq A$，有

$$a\wedge(\vee S)=\vee\{a\wedge s\mid s\in S\}.$$

证明　由命题(4.2.2)，则知A是紧的序Hausdorff拓扑偏序集．从而由单调收敛定理(即，定理(4.1.10))可知A中有定向并和余定向交，又A是交半格(有有限交)，于是A有任意交．所以，A为完备格．

现设$a\in A$，$S\subseteq A$是定向集，则由单调收敛定理(4.1.10)可知

$$\lim S=\sup S=\vee S.$$

又A是拓扑交半格，于是映射

$$a\wedge(-):A\to A$$

是连续的．所以，有

$$\begin{aligned}a\wedge(\vee S)&=a\wedge(\lim S)\\&=\lim\{a\wedge s\mid s\in S\}\\&=\vee\{a\wedge s\mid s\in S\}.\end{aligned}$$

(4.2.4)**定理**　设A是紧Hausdorff拓扑交半格，$F\subseteq A$是下集，则F(关于A上拓扑)是闭集当且仅当F对于定向并封闭(即F是Scott闭集)．

证明　假设F是闭集，$S\subseteq F$为定向集，则S作为F中的网，$\vee S=\lim S\in F$．

反之，设下集F对于定向并封闭，并且$x\in cl(F)$．又设U_0，U_1，U_2，…是x的一个邻域序列．若它满足以下两个条件：

(a)每个U_i都是x的闭邻域；

(b)对于每个i，有$U_{i+1}\wedge U_{i+1}\subseteq \mathrm{int}U_i$，

则称$U=(U_0,U_1,U_2,\cdots)$是x的一个基本序列．

首先说明基本序列的存在性．设U是x的任意闭邻域．由于

$$\wedge:A\times A\to A$$

连续，$x\wedge x=x$，从而存在x的开邻域V_1,W_1满足

$$V_1\wedge W_1\subseteq \mathrm{int}(U).$$

又因为A是正则空间，于是存在x的开邻域V,W使得

$$V\subseteq cl(V)\subseteq V_1,\quad W\subseteq cl(W)\subseteq W_1.$$

令$U_0=U,U_1=cl(V\cap W)$，则U_0,U_1都是x的闭邻域，并且

$$U_1\wedge U_1=cl(V\cap W)\wedge cl(V\cap W)$$
$$\subseteq cl(V)\wedge cl(W)\subseteq \mathrm{int}(U_0).$$

对于U_1继续施行上述的推导即可产生U_2，等等。所以，由归纳法可以构造出x的基本序列.

现设$\boldsymbol{U}$是x的一个基本序列。因为$x\in cl(F)$，故对于每个$n=1,2,\cdots$，存在$y_n\in F\cap U_n$。定义

$$z_n=\wedge\{y_m\mid m\geqslant n\},$$

则由F是下集可知$z_n\in F\,(n=1,2,\cdots)$。显然，序列$\{z_n\}$是递增的。但是，F对于定向并封闭，于是

$$z=\vee\{z_n\mid n\geqslant 1\}\in F.$$

对于$n=1,2,\cdots$，令

$$x_k^{(n)}=\wedge\{y_m\mid n\leqslant m\leqslant k\},$$

则序列$\{x_k^{(n)}\}$关于k是递减的.于是由单调收敛定理（4.1.10）可知

$$\forall n\geqslant 1,\quad z_n=\lim_{k\to\infty}x_k^{(n)}=\bigwedge_{k=n}^{\infty}x_k^{(n)}.$$

以下证明，对于任意$n=1,2,\cdots$，$\{x_k^{(n)}\}$是$\mathrm{int}(U_{n-1})$中的序列，即$\forall n\geqslant 1$，$k\geqslant n$，$x_k^{(n)}\in \mathrm{int}(U_{n-1})$。

当$k=n$时，有

$$x_k^{(n)}=x_n^{(n)}=y_n\in U_n\subseteq U_n\wedge U_n\subseteq \mathrm{int}(U_{n-1}).$$

假设对于$k-n=l>0$，有

$$x_n^{(n)}\in \mathrm{int}(U_{n-1}).\qquad (*)$$

考虑$x_{k+1}^{(n)}=x_{k+1}^{(n+1)}\wedge y_n$，因为

$$(k+1)-(n+1)=k-n=l,$$

故由归纳假设$(*)$可知

$$x_{k+1}^{(n+1)} \in \operatorname{int}(U_n).$$

所以，

$$x_{k+1}^{(n)} = y_n \wedge x_{k+1}^{(n+1)} \in U_n \wedge \operatorname{int}(U_n)$$
$$\subseteq U_n \wedge U_n \subseteq \operatorname{int}(U_{n-1}).$$

于是由归纳法可知，对于一切$n=1,2,\cdots$，有

$$\{x_k^{(n)}\}_{k\geq n} \subseteq \operatorname{int}(U_{n-1}).$$

因为每个U_n都是闭集，所以，对任意$n\geq 1$，有

$$z_n = \operatorname*{Lim}_{k\to\infty} x_k^{(n)} \in U_{n-1} \subseteq U_{n-1} \wedge U_{n-1} \subseteq \operatorname{int} U_{n-2} \subseteq U_{n-2}$$
$$\cdots \subseteq \cdots \subseteq U_0$$

特别地，对一切$n\geq 0$，，$m>n$，有

$$z_m \in U_n.$$

所以，对于一切$n\geq 0$，有

$$z = \bigvee\{z_m \mid m\geq n+1\} \in U_n，\text{即 } z \in \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n.$$

集$\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$是闭集的交，从而是 闭的．于是它对于余定向交封闭．事实上，集$\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$对有限交也封闭．若$u$，$v\in \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$，则对任意$n\geq 0$，有

$$u, v \in U_{n+1}，\quad u\wedge v \in U_{n+1} \wedge U_{n+1} \subseteq \operatorname{int}(U_n),$$

于是$u\wedge v \in \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$．从而集$\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$对于任意交封闭. 故它必含有一个最小元，记作$h(U)$．由于$F$是下集，$z\in F\cap\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n\right)$，所以$h(U)\in F$．

用$\mathscr{S}$记x的全体基本序列之集，并且在$\mathscr{S}$上定义一 个关 系如下：对于U，$V\in\mathscr{S}$，则

$$U\leq V \text{ 当且仅当 } \forall n\geq 0,\ U_n \supseteq V_n.$$

易见这是$\mathscr{S}$上的一个偏序，若

$$\boldsymbol{U}=(U_0,U_1,\cdots),\ \boldsymbol{V}=(V_0,V_1,\cdots)\in\mathscr{S},$$

则$(U_0\cap V_0,U_1\cap V_1,\ \cdots)\in\mathscr{S}$，并且是$\{\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V}\}$在$\mathscr{S}$中的上界. 从而$\mathscr{S}$是定向集. 此外，若$\boldsymbol{U}\leqslant\boldsymbol{V}$，则由$\forall n\geqslant 0$，$U_n\supseteq V_n$，可知

$$\bigcap\{U_n\mid n\geqslant 0\}\supseteq\bigcap\{V_n\mid n\geqslant 0\}.$$

于是$h(\boldsymbol{U})\leqslant h(\boldsymbol{V})$. 这样得到了一个保序映射

$$\boldsymbol{h}:\mathscr{S}\to F.$$

因为$\mathscr{S}$是定向集，故$h(\mathscr{S})\subseteq F$是定向集. 所以，由假设得到

$$\bigvee\{h(\boldsymbol{U})\mid\boldsymbol{U}\in\mathscr{S}\}\in F.$$

设U是x的任意邻域，则由前面的论证可以看出，存在基本序列$\boldsymbol{U}=(U_0,U_1,\ \cdots)$满足$U\subseteq U_0$(例如，$U_0$可取成$cl(U)$). 于是

$$\forall\boldsymbol{V}=(V_0,V_1,\cdots)\in\mathscr{S},$$

若$\boldsymbol{V}\geqslant\boldsymbol{U}$，则

$$h(\boldsymbol{V})\in V_0\subseteq U_0\subseteq U.$$

换言之，x是网$\{h(\boldsymbol{U})\mid\boldsymbol{U}\in\mathscr{S}\}$的极限. 故由单调收敛定理(4.1.10)可知

$$x=\lim\{h(\boldsymbol{U})\mid\boldsymbol{U}\in\mathscr{S}\}=\bigvee\{h(\boldsymbol{U})\mid\boldsymbol{U}\in\mathscr{S}\}\in\boldsymbol{F}.$$

所以，F是闭集. 证毕.

注意 定理(4.2.4)特别表明了紧Hausdorff拓扑交半格的闭下集由交半格上偏序唯一确定.

(4.2.5)注 对于并半格，命题(4.2.2)、定理(4.2.3)和定理(4.2.4)分别有对偶的结论. 即

命题 任意Hausdorff拓扑并半格是序Hausdorff拓扑偏序集.

定理 设A是紧Hausdorff拓扑并半格，则A是完备格，并且满足下列形式的分配律：对于任意$a\in A$与任意余定向集$S\subseteq A$，有

$$a\vee(\wedge S)=\wedge\{a\vee s\mid s\in S\}$$

定理 设A是紧Hausdorff拓扑并半格，$G\subseteq A$是上集，则

G（关于A上拓扑）是开集当且仅当 G 对于余定向交封闭（即G是Scott开集）。

(4.2.6) **定理** 设A是(完备)格，则至多有一个拓扑使得A成为紧Hausdorff拓扑格。

证明 根据定理(4.2.4)与其相应的关于拓扑并半格的对偶结论可知，若A是紧Hausdorff拓扑格，则其中的开上集和开下集由A上偏序唯一地确定。于是由局部凸性定理(4.1.8)可知这两种开集足以确定A上拓扑。

实际上，定理(4.2.6)对交半格情形仍然成立。但因其证明涉及较多拓扑知识，故不加证明地将其叙述如下：

(4.2.7) **定理** 设A是(完备)格，则至多有一个拓扑使A成为紧Hausdorff拓扑交半格。

(4.2.8) **定义** 以紧Hausdorff拓扑格为对象，连续的格同态为态射构成一个范畴，称为紧Hausdorff拓扑格范畴，记为$\boldsymbol{KHausTopLat}$。

(4.2.9) **定理** 设A，B是紧Hausdorff拓扑格，f：$A\to B$是映射，则f是连续的格同态当且仅当f保任意交和保任意并(即f是完备格同态)。

证明 设f是连续的格同态。因为定向并和余定向交都是网的极限，于是f保定向并和保余定向交。所以，由f是格同态可知f为完备格同态。

反之，设f是完备格同态。若F是B的闭下集，则容易看到$f^{-1}(F)$是A的下集，并且$f^{-1}(F)$对于定向并封闭．于是由定理(4.2.4)可知f^{-1}保闭下集。对偶的论证表明f^{-1}保闭上集，则从而f^{-1}保开上集和保开下集，所以，由局部凸性定理可知f是连续的。

(4.2.10) **推论** 紧Hausdorff拓扑格范畴$\boldsymbol{KHausTopLat}$是完备格范畴$\boldsymbol{CLat}$的满子范畴。

证明 这是定理(4.2.3)和定理(4.2.9)的直接结果。

§ 4.3 偏序集上的区间拓扑

(4.3.1) **定义** 设 $(A, \leqslant)$ 是偏序集.

(i) 对于 a, $b \in A$, $a \leqslant b$, 则由 a, b 确定的闭区间是集

$$[a, b] = \{x \in A \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

(ii) 由 A 的全体闭区间之族为闭子基生成的 A 上拓扑称为区间拓扑. 换言之, 集 $F \subseteq A$ 关于区间拓扑是闭集当且仅当 F 可以表为 A 的闭区间的有限并的任意交.

显然, 偏序集 A 上的区间拓扑必是 T_1 的.

(4.3.2) **定义** 设 A 是完备格, φ 是 A(的基础集)上滤子, 即幂集格 $P(A)$ 的真滤子, 则 φ 的上极限与下极限分别定义为:

$$\lim\sup \varphi = \wedge\{\vee S \mid S \in \varphi\}$$

与

$$\lim\inf \varphi = \vee\{\wedge S \mid S \in \varphi\}.$$

(4.3.3) **命题** 设 φ 是完备格 A(的基础集)上超滤, 即幂集格 $P(A)$ 的极大真滤子, 则 φ 关于 A 上的区间拓扑收敛于 $x \in A$ 当且仅当

$$\lim\inf \varphi \leqslant x \leqslant \lim\sup \varphi.$$

证明 记

$$u = \lim\inf \varphi \text{ 与 } v = \lim\sup \varphi.$$

设 $u \leqslant x \leqslant v$. 考虑 A 的一个基本闭集, 即闭区间的有限并, $\bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \in \varphi$, 则存在某个 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 满足 $[a_i, b_i] \in \varphi$ (根据推论(2.6.6)的对偶命题). 于是

$$a_i = \wedge[a_i, b_i] \leqslant \vee\{\wedge S \mid S \in \varphi\} = u$$

与

$$b_i = \vee[a_i, b_i] \geqslant \wedge\{\vee S \mid S \in \varphi\} = v.$$

即 $[u, v] \subseteq [a_i, b_i]$. 设 F 是 φ 中的任意一个闭集, 将其表成基本

闭集的交

$$F=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha，\text{其中}\forall\alpha\in\Gamma，F_\alpha\text{是基本闭集}.$$

由于φ是上集，从而$\forall\alpha\in\Gamma, F_\alpha\in\varphi$. 根据以上讨论可知，$\forall\alpha\in\Gamma$，存在闭区间$[a_\alpha, b_\alpha]\subseteq F_\alpha$满足$[u,v]\subseteq[a_\alpha,b_\alpha]$. 于是

$$[u,v]\subseteq\bigcap_{\alpha\in\Gamma}[a_\alpha,\ b_\alpha]\subseteq\bigcap_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha=F.$$

即φ中的任意闭集都包含$[u,v]$.

现在$x\in[u,v]$，对于$S\in\varphi$，若H是包含S的基本闭集，则必有$H\in\varphi$，从而$[u,v]\subseteq H$，$x\in H$. 又因为对于$S\in\varphi$，有

$$cl(S)=\bigcap\{H\mid S\subseteq H\text{与}H\text{是闭集}\}$$
$$=\bigcap\{H\mid S\subseteq H\text{与}H\text{是基本闭集}\}.$$

于是$x\in cl(S)$. 故对于x的任意邻域U与任意$S\in\varphi$，有$U\cap S\neq\phi$. 令

$$\varphi^*=\{U\cap S\mid U\text{是}x\text{的邻域，}S\in\varphi\}.$$

显然，φ^*是真滤子，并且$\varphi\subseteq\varphi^*$. 根据$\varphi$的极大性，则知$\varphi^*=\varphi$. 换言之，$x$的邻域滤子含于$\varphi$中. 所以，$\varphi$收敛于$x$.

反之，设φ收敛于x，又设$S\in\varphi$. 若$x\not\leqslant\bigvee S$（或者$\bigwedge S\not\leqslant x$），则有$x$的开邻域

$$\{y\in A\mid y\not\leqslant\bigvee S\}=A-\downarrow(\bigvee S)\in\varphi$$

（或者$\{y\in A\mid\bigwedge S\not\leqslant y\}=A-\uparrow(\bigwedge S)\in\varphi$）.

但是$S\cap(A-\downarrow(\bigvee S))=\phi$（或者$S\cap(A-\uparrow(\bigwedge S))=\phi$），这是不可能的. 因此，对于任意$S\in\varphi$，有

$$\bigwedge S\leqslant x\leqslant\bigvee S.$$

所以，

$$\begin{aligned}\lim\ \inf\varphi&=\bigvee\{\bigwedge S\mid S\in\varphi\}\\&\leqslant x\\&\leqslant\bigwedge\{\bigvee S\mid S\in\varphi\}=\lim\ \sup\varphi.\end{aligned}$$

(4.3.4) **定理** 完备格上区间拓扑是紧的.

证明 根据命题(4.3.3)只需证明对于完备格A(的基础集)上任意超滤(即幂集格$P(A)$的极大真滤子)φ，恒有

$$\lim\inf\varphi\leqslant\lim\sup\varphi.$$

因为φ是真滤子，于是任取S，$T\in\varphi$有

$$\wedge S\leqslant\wedge(S\cap T)\leqslant\vee(S\cap T)\leqslant\vee T.$$

从而$\lim\inf\varphi=\vee\{\wedge S\mid S\in\varphi\}\leqslant\vee T$，所以，

$$\lim\inf\varphi\leqslant\wedge\{\vee S\mid S\in\varphi\}=\lim\sup\varphi.$$ 证毕。

尽管有定理(4.3.4)，但是完备格上区间拓扑并不能保证格运算连续(即使区间拓扑是Hausdorff的，依然如此)，从而一般不能构成拓扑格(或拓扑半格)。这可由下例清楚看出。

(4.3.5)**例** 设

$$A=\{0,1\}\cup(\{x\in R\mid 0<x<1\}\times\{0,1\}),$$

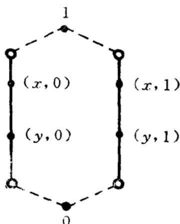


图 (4.3.1)

其中R为实数集。A上偏序规定如下：0与1分别是A的最小元与最大元，并且对于$(x,i),(y,j)\in A-\{0,1\}$，则$(x,i)\leqslant(y,j)$当且仅当在R中有$x\leqslant y$与$i=j$.显然，A是完备格(见图(4.3.1))。

关于区间拓扑，A是Hausdorff空间：

事实上，对于$a,b\in A$, $a\neq b$若$a=0$, $b=1$(或$a=1$, $b=0$)，则显然a,b可用开邻域分离。当a和b中有一个元为0或1时，证明也是明显的。于是不妨设a和b都不为0或1.即存在$x,y\in R$, $0<x<1$, $0<y<1$使得$a=(x,0)$与$b=(y,1)$（或$a=(x,1)$与$b=(y,0)$，或$a=(x,0)$，$b=(y,0)$与$x\neq y$，或$a=(x,1)$，$b=(y,1)$与$x\neq y$)，无论何种情形，都有

$$a\in A-\uparrow(b),\quad b\in A-\downarrow(a)\ (\text{当}x\leqslant y\text{时})$$

或

$$a\in A-\downarrow(b),\quad b\in A-\uparrow(a)\ (\text{当}x\geqslant y\text{时}).$$

从而$A-\uparrow(b)$，$A-\downarrow(a)$(或$A-\downarrow(b)$，$A-\uparrow(a)$)是a，b的不相交

开邻域。于是关于区间拓扑 A 是 Hausdorff 的。所以，根据定理(4.3.4)可知A关于区间拓扑是紧Hausdorff空间。但是，A上交、并运算都是不连续的。事实上，若A上交运算连续，则取

$$a=\left(\frac{1}{2},1\right),\ S=\{(x,0)\in A\mid 0<x<1\}\subseteq A,$$

显然S是定向集，从而由定理(4.2.3)可知

$$\begin{aligned}a\wedge(\vee S)&=\left(\frac{1}{2},1\right)\wedge(\vee\{(x,0)\in A\mid 0<x<1\})\\&=\left(\frac{1}{2},1\right)\wedge 1\\&=\left(\frac{1}{2},1\right)\\&=\vee\{a\wedge s\mid s\in S\}\\&=\vee\left\{\left(\frac{1}{2},1\right)\wedge(x,0)\mid 0<x<1\right\}\\&=0.\end{aligned}$$

这是不可能的。所以，A上交运算不是连续的。对偶地可知 A 上并运算也不是连续的。此外，还容易看出A不是分配格。

(4.3.6) **定理** 完全分配格关于区间拓扑是紧Hausdorff拓扑格。

证明 设A是完全分配格，以下分成两步骤证明。

(i) A上区间拓扑是Hausdorff的：

设φ是A(的基础集)上超滤，即幂集格$P(A)$的极大真滤子．只需证明

$$\lim\inf\varphi\geqslant\lim\sup\varphi,$$

因为这表明φ收敛于唯一的极限。

根据完全分配律，可知

$$\begin{aligned}\lim\inf\varphi&=\vee\{\wedge S\mid S\in\varphi\}\\&=\wedge\{\vee\{f(S)\mid S\in\varphi\}\mid f\in\Phi\},\end{aligned}$$

其中Φ是φ上选择函数之族，即

$$\Phi=\{f\mid f\text{是}\varphi\text{上函数使得}\forall S\in\varphi,\ f(S)\in S\}.$$

对于$f\in\Phi$，因为$\forall T\in\varphi$有$f(T)\in T$，于是

$$\{f(S)\mid S\in\varphi\}\cap T\neq\phi,$$

从而由φ的极大性可知$\{f(S)\mid S\in\varphi\}\in\varphi$。所以，

$$\begin{aligned}\lim\ \inf\varphi&=\bigwedge\{\bigvee\{f(S)\mid S\in\varphi\}\mid f\in\Phi\}\\&\geqslant\bigwedge\{\bigvee T\mid T\in\varphi\}\\&=\lim\ \sup\varphi.\end{aligned}$$

(ii) A上的交、并运算关于区间拓扑连续：

对于$x\in A$，令

$$S_x=\{(x_1,x_2)\in A\times A\mid x_1\wedge x_2\leqslant x\},$$
$$F_x=\{f\mid f:S_x\to\{1,2\}\}$$

与

$y(f)=\bigvee\{x_{f(x_1,x_2)}\mid(x_1,\ x_2)\in S_x\}$，其中$f\in F_x$。根据完全分配律，则得

$$\begin{aligned}x&=\bigvee\{x_1\wedge x_2\mid(x_1,\ x_2)\in S_x\}\\&=\bigwedge_{f\in Fx}\{\bigvee x_{f(x_1,x_2)}\mid(x_1,\ x_2)\in S\}\\&=\bigwedge\{y(f)\mid f\in F_x\}.\end{aligned}$$

对于$(x_1,x_2)\in S_x$与$f\in F_x$，根据$y(f)$的定义，则有

当$f(x_1,x_2)=1$时，$y(f)\geqslant x_1$，

当$f(x_1,x_2)=2$时，$y(f)\geqslant x_2$。

现在对于$x\in A$，则集

$$\{a\in A\mid a\nleqslant x\}=A-\downarrow(x)$$

关于区间拓扑为开集，并且对于$(a_1,b_1)\in A\times A$有

$$\begin{aligned}&(a_1,b_1)\in\wedge^{-1}\{a\in A\mid a\nleqslant x\}\\&\Longleftrightarrow(a_1b_1)\notin S_x\\&\Longleftrightarrow\text{存在}f_0\in F_x\text{，满足}y(f_0)\ngeqslant a_1,\ y(f_0)\ngeqslant b_1\\&\Longleftrightarrow(a_1,b_1)\in(A-\downarrow(y(f_0)))\times(A-\downarrow(y(f_0))),\\&\qquad f_0\in F_x.\end{aligned}$$

于是得出

$$\wedge^{-1}(A-\downarrow(x))=\bigcup_{f\in F_x}(A-\downarrow(y(f)))\times(A-\downarrow(y(f))). \qquad (1)$$

因此$\wedge^{-1}(A-\downarrow(x))$是$A\times A$的开集．另外，还容易验证，对于$x\in A$，则集$\wedge^{-1}(A-\uparrow(x))$

$$=[A\times(A-\uparrow(x))]\bigcup[(A-\uparrow(x))\times A] \qquad (2)$$

也是$A\times A$的开集．

显然，集族

$$\{A-\downarrow(x)|\,x\in A\}\bigcup\{A-\uparrow(x)|\,x\in A\}$$

构成A上区间拓扑的一个开子基．因为(1)和(2)式表明A上交运算$\wedge$反射子基开集为开集，所以A上交运算关于区间拓扑连续．

类似地可以证明，A上并运算关于区间拓扑连续．

综上所证与定理(4.3.4)，则知A是紧Hausdorff拓扑格．

§4.4 完全分配格的构造

作为本章前几节结果的应用，本节给出了完全分配格的若干等价刻划，以及相关的一些性质．

(4.4.1)引理　设A是格，$f:A\to[0,1]$是映射，则f是格同态当且仅当$\forall t\in(0,1]$，$f^{-1}([0,t))$是素理想．

证明　设f是格同态．容易验证，对于$t\in(0,1]$，$f^{-1}([0,t))$是真理想．假定存在$a,b\in A$，使得

$a\wedge b\in f^{-1}([0,t))$，$a\notin f^{-1}([0,t))$与$b\notin f^{-1}([0,t))$，

则有　　$f(a\wedge b)<t$，$f(a)\geqslant t$与$f(b)\geqslant t$．

但f是格同态，从而

$$f(a\wedge b)=f(a)\wedge f(b)\geqslant t\wedge t=t.$$

这与$f(a\wedge b)<t$矛盾．所以，$f^{-1}([0,t))$是素理想．

反之，设对于任意$t\in(0,1]$，$f^{-1}([0,t))$是素理想．假定

存在a，$b\in A$，满足$f(a\wedge b)\neq f(a)\wedge f(b)$.若

$$f(a\wedge b)<f(a)\wedge f(b),$$

令

$$t=f(a)\wedge f(b)\in[0,\ 1],\ t>0,$$

则$a\wedge b\in f^{-1}([0,t))$. 由于$f^{-1}([0,t))$是素理想,从而$a\in f^{-1}([0,t))$或者$b\in f^{-1}([0,t))$. 即

$$0\leqslant f(a)<t\text{或者}0\leqslant f(b)<t.$$

但是,这与t的定义矛盾;同理可证$f(a\wedge b)>f(a)\wedge f(b)$不成立.于是$f$保有限交.类似地可以证明$f$还保有限并.所以,$f$是格同态.

(4.4.2) **定理** 设格A上区间拓扑使之成为紧Hausdorff拓扑格(从而A是完备格)，又设a，$b\in A$，$a\nleqslant b$，则存在a,b的不相交开邻域U，V使得U是滤子与V是理想.

证明 根据定理(4.2.2)和(4.1.5)，则知存在a，b的不相交开邻域U_0，V_0使得U_0是上集与V_0是下集. 因为$A-V_0$是闭上集，故它可以表示为形如$\bigcup_{i=1}^{m}\uparrow(x_i)$的基本闭上集的交. 特别地，存在基本闭上集$\bigcup_{i=1}^{m}\uparrow(x_i)$，满足

$$b\notin\bigcup_{i=1}^{m}\uparrow(x_i),\quad U_0\subseteq A-V_0\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}\uparrow(x_i). \tag{1}$$

对于任意正整数n，则由$\wedge$的连续性，以及

$$x=\underbrace{x\wedge\cdots\wedge x}_{n\text{个}}$$

可知存在x的开邻域V_1，…，V_m，满足

$$V_1\wedge\cdots\wedge V_m\subseteq U_0.$$

记$U_1=V_1\cap\cdots\cap V_m$，则$U_1$是$x$的开邻域，并且

$$U_1\wedge\underbrace{U_1\wedge\cdots\wedge}_{m\text{个}}U_1\subseteq U_0. \tag{2}$$

(根据A是拓扑格,容易证明,若U是A的开集,则$\uparrow(U)$也是开集).

从而在(2)式中不妨假定U_1是上集.将(1)式与(2)式结合,则得

$$U_1 \wedge \cdots \wedge U_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \uparrow(x_i). \tag{3}$$

若对于$i=1, \cdots, m$, $U_1 \not\subseteq \uparrow(x_i)$, 则对于$i=1, 2, \cdots, m$, 存在$u_i \in U_1 - \uparrow(x_i)$, 于是由(3)式得到

$$u = u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_m \in U_1 \wedge \cdots \wedge U_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \uparrow(x_i).$$

从而存在某个$i(1 \leqslant i \leqslant m)$使得$u \in \uparrow(x_i)$. 因此, 有$u_i \geqslant u \geqslant x_i$, 即$u_i \in \uparrow(x_i)$, 这与$u_i$的选取矛盾. 故存在$1 \leqslant i \leqslant m$, 使得$U_1 \subseteq \uparrow(x_i)$. 令$a_1 = \wedge U_1$, 则

$$a_1 = \wedge U_1 \geqslant \wedge \uparrow(x_i) = x_i.$$

由此即知, $a_1 \not\leqslant b$. 此外, 由于$U_1 \subseteq U_0$, 所以U_1与V_0不相交.

将同样的论证对偶地用于a_1, b以及它们的不相交开邻域U_1, V_0, 则存在b_1的下开邻域V_1, 满足

$$U_1 \cap V_1 = \phi, \quad a_1 \not\leqslant b_1 = \vee V_1.$$

使用归纳法可以找到开上集序列$\{U_n\}$和开下集序列$\{V_n\}$, 满足下列条件: 对于一切正整数n,

$$U_n \cap V_n = \phi, \quad \wedge U_n = a_n \in U_{n+1}, \quad \vee V_n = b_n \in V_{n+1}. \tag{4}$$

因为U_n, V_n分别是上, 下集, 于是由(4)可得

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_n \subseteq \cdots$$

与

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_n \subseteq \cdots. \tag{5}$$

令

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, \quad V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n,$$

则$U \cap V = \phi$, U, V分别是a, b的开邻域, U是上集与V是下集.

设u, $v \in U$, 则有正整数m, $n \geqslant 1$, 使得$u \in U_m$, $v \in U_n$. 不妨设$m \leqslant n$, 于是

$$u \geqslant \wedge U_m = a_m \geqslant a_n = \wedge U_n, \quad v \geqslant \wedge U_n = a_n.$$

从而

$$u \wedge v \geqslant a_n \in U_{n+1} \subseteq U.$$

但U是上集，所以，$u\wedge v\in U$．综上所证，则知U是滤子．

同理可证V是理想．

(4.4.3) **推论** 在定理(4.4.2)的假设下，若格A还是分配格，则还可以要求U是素滤子与V是素理想．

证明 设a，$b\in A$，$a\not\leqslant b$，又设U_1，V_1分别是a，b的不相交开邻域，使得U_1是滤子与V_1是理想．令K是关于下述性质极大的理想：

$$K\subseteq V_1,\quad K\cap U_1=\phi, \tag{6}$$

则由定理 (2.6.5) 可知 K是素理想．下面证明K还是闭的．令$k=\bigvee K$．假设$k\notin K$，则由K和k生成的理想K'是包含K的理想，并且$K'\neq K$．由K关于性质(6)的极大性，则必有$K'\cap U_1\neq\phi$．不难验证

$$K'=\{u\vee(k\wedge v)\mid u\in K,\ v\in A\}.$$

从而，存在$u\in K$，$v\in A$，使得

$$u\vee(k\wedge v)\in U_1.$$

但是$k=\bigvee K\geqslant u$与U_1是上集，故$k\in U_1$．根据定理(4.2.4)，则U_1是Scott开集，并且K是定向集，故有$K\cap U_1\neq\phi$，这与(6)式矛盾．从而得知$k\in K$．再因为K是下集，于是K对于定向并封闭．故由定理(4.2.4)可知K是闭的．于是$A-K$是包含U_1的素开滤子．再设F是关于下列性质的极大滤子：

$$F\supseteq A-K,\quad F\cap V_1=\phi,$$

则同理可知F是闭素滤子．故有

$$A-K\supseteq U_1,\quad A-F\supseteq V_1,$$

满足要求．证毕．

(4.4.4) **定理** 设A是完全分配格，则作为frame，A是空间式的．

证明 假设$a,b\in A$，$a\not\leqslant b$．根据定理(4.3.6)，则关于区间拓扑，A成为紧Hausdoff拓扑格．再由推论(4.4.3)可知存在一个开素滤子F使得$a\in F$，$b\notin F$．从而由定理(4.2.4)的对偶可知F是Scott开集．于是不难看出F是完备素滤子，故F唯一地确定一个

frame同态$p: A\to\{0,1\}$，使得$F=p^{-1}(1)$，即$p(a)=1, p(b)=0$。所以，A是空间式的(根据定理(3.3.2))。

(4.4.5) **定理** (Urysohn-Strauss引理)。设A是分配的完备格，并且关于区间拓扑A成为紧Hausdorff拓扑格，则对于$a, b\in A, a\nleqslant b$，存在连续的格同态$f: A\to[0,1]$，使得$f(a)=1$，$f(b)=0$。

证明 根据推论(4.4.3)，则存在A的开素理想V_1，满足$b\in V_1, a\notin V_1$，于是$A-V_1$是闭滤子，从而它是闭上集。根据定理(4.2.4)的对偶，则$A-V_1$对于余定向交封闭。但是作为滤子，$A-V_1$也对有限交封闭，因此$A-V_1$对任意交封闭。令$v_1=\bigwedge(A-V_1)$，则有$A-V_1=\uparrow(v_1)$。显然$v_1\leqslant a, v_1\nleqslant b$。再由推论(4.4.3)可知存在开素理想$V_0$，满足：

$$b\in V_0, v_1\notin cl(V_0).$$

因为A上拓扑是区间拓扑，故有

$$\begin{aligned} cl(V_0) &= \bigcap\{G \mid G\supseteq V_0, G\text{是闭集}\} \\ &= \bigcap\{G \mid G\supseteq V_0, G\text{是基本闭下集}\} \qquad (8) \\ &= \bigcap\{\bigcup_{i=1}^{n}\downarrow(x_i) \mid \bigcup_{i=1}^{n}\downarrow(x_i)\supseteq V_0\}. \end{aligned}$$

于是$cl(V_0)$也是下集。若$x\notin V_1$，则$x\geqslant v_1$。但是$v_1\notin cl(V_0)$，从而由(8)式可知$x\notin cl(V_0)$。即有

$$cl(V_0)\subseteq V_1.$$

综上所述，则得到开素理想V_1, V_0，满足条件：

$$b\in V_0, a\notin V_1, cl(V_0)\subseteq V_1.$$

用归纳法继续这个构造的过程，可以得到开素理想的一个序列$\{V_r \mid r\in Q\cap[0,1]\}$(其中$Q$表示有理数集)，满足条件：

$$b\in V_0, a\notin V_1, \text{并且对于} r, r'\in Q\cap[0,1],$$
$$\text{若} r<r', \text{则} cl(V_r)\subseteq V_{r'}. \qquad (9)$$

现在定义映射$f: A\to[0,1]$为

$$\forall x\in A, f(x)=\inf\{r\in Q\cap[0,1] \mid x\in V_r\},$$

则由条件(9)可知$f(a)=1, f(b)=0$。

f是连续的：只需证明对于$a,b\in[0,1]$，集

$$f^{-1}([0,a)), f^{-1}((b,1])$$

都是X的开集．事实上，由f的定义容易看出，

$$f^{-1}([0,a))=\bigcup\{V_r\mid r<a\},$$

$$f^{-1}((b,1])=\bigcup\{A-cl(V_r)\mid r>b\}.$$

显然，这些都是A的开集．所以，f连续．

f是格同态：由引理(4.4.1)可知只需证明对于$t\in(0,1]$、$f^{-1}([0,t))$是素理想．不难看到

$$f^{-1}([0,t))=\bigcup\{V_r\mid r<t\},$$

故$f^{-1}([0,t))$是素理想的并，并且这些素理想满足条件(9)．由此即知$f^{-1}([0,t))$也是素理想．证毕．

(4.4.6) **定理** 设A是分配的完备格，则下列条件等价：

(i) A是完全分配格；

(ii) A上区间拓扑使其成为紧Hausdorff拓扑格；

(iii) A上有紧Hausdorff拓扑使得A同构于$[0,1]$的某个幂的闭子格；

(iv) A同构于$[0,1]$的某个幂的子完备格．

证明 (i)$\Longrightarrow$(ii)由定理(4.3.6)即得．

(ii)$\Longrightarrow$(iii)令

$S=\{f\mid f:A\to[0,1]$ 为连续的格同态$\}$，定义一个映射θ如下：

$$\theta: A\to\prod_S[0,1], a\mapsto\{f(a)\}_{f\in S}.$$

显然θ是一个格同态，并且由Urysohn-Strauss引理可知θ是单射．由于A是紧的，故其象$\theta(A)$是$\prod_S[0,1]$的闭集．

(iii)$\Longrightarrow$(iv)设A同构于$\prod\limits_{r\in\Gamma}[0,1]_r$的一个闭子格，则由单调收敛定理可知$\prod\limits_{r\in\Gamma}[0,1]_r$的闭子格是子完备格，故$A$同构于$[0,1]$的幂的子完备格．

(iv) $\Longrightarrow$ (i) 这由例(2.10.7)即证。

(4.4.7) **注** 如同定理(4.4.5)一样，有关完全分配格的许多结论都可以通过拓扑的方法得到．作为实例，这里将给出 G.N. Raney定理(2.10.15)的一种证明方法（事实上，是其必要性的一面）．本节后面还将看到应用拓扑主要结果的几个实例．

G.N.Raney定理必要性的证明 设A是完全分配格，又设$a,b\in A, a\not\leqslant b$．根据定理(4.3.6)，则$A$关于区间拓扑成为紧Hausdorff拓扑格，于是由推论(4.4.3)可知，存在开素滤U，开素理想V，使得

$$a\in U, b\in V, U\cap V=\phi.$$

令$F=A-V, K=A-U$，则K是闭素理想，F是闭素滤子．由单调收敛定理，则知K对任意并封闭，F对任意交封闭．即$\bigvee K\in K$，$\bigwedge F\in F$．令

$$p=\bigvee K\in K, q=\bigwedge F\in F.$$

若$a\leqslant p$，则由U是上集得出$p\in U$．这是不可能的．从而$a\not\leqslant p$．同理可证$b\not\geqslant q$．

对于$x\in A$，因为

$$\begin{aligned} A &= A-(U\cap V)=(A-U)\cup(A-V) \\ &= F\cup K, \end{aligned}$$

故$x\in F$或者$x\in K$．若$x\in F$，则$x\geqslant\bigwedge F=q$；若$x\in K$，则$x\leqslant\bigvee K=p$．证毕。

对于完全分配格$A, a\in A$，则由定理(2.10.13)、定理(4.4.4)和(3.3.2)可知

$$\begin{aligned} a &= \bigvee\Downarrow(a) \\ &= \bigvee\{m\in A \mid m\leqslant a, m\text{是余素元}\}. \end{aligned}$$

以$M(A)$表示A的全体余素元之集(即$M(A)=pt^{\circ}(A^{op})$)．对于$a\in A$，若$\beta(a)$是a的最大极小集，则$\beta(a)\cap M(A)$也是a的极小集．

(4.4.8) **定义** 设A是完全分配格，$a\in A$．若B是a的极小集，$B\subseteq M(A)$，则称B是一个分子极小集．常以$\beta^*(a)$记a的分子极

小集.

综合以上讨论，可知在完全分配格中，每个元都有分子极小集.

(4.4.9) **定理** 设A是完全分配格，$m\in A$，则$m\in M(A)$当且仅当m的每个分子极小集都是定向集.

证明 设$m\in M(A)$，$\beta^*(m)$是m的一个分子极小集. 假设$\beta^*(m)$不是定向集，即存在$a,b\in\beta^*(m)$使得$\forall c\in\beta^*(m)$，$a\nleqslant c$或$b\nleqslant c$. 令

$$K_a=\{d\in\beta^*(m)\mid d\ngeqslant a\},\ x=\bigvee K_a,$$

与 $$K_b=\{d\in\beta^*(m)\mid d\ngeqslant b\},\ y=\bigvee K_b,$$

则

$$\beta^*(m)=K_a\cup K_b.$$

因此

$$x\vee y=\bigvee K_a\vee\bigvee K_b$$
$$=\bigvee(K_a\cup K_b)=\bigvee\beta^*(m)=m.$$

因为m是余素元，于是可得$m=x$，或者$m=y$，若$m=x=\bigvee K_a$，则由$\beta^*(m)$是m的极小集与$a\in\beta^*(m)$可知存在$c\in K_a$使得$a\leqslant c$. 这与K_a的定义矛盾. 同理，若$m=y$，则也导致矛盾. 所以$\beta^*(m)$是定向集.

反之，假定m的每个分子极小集都是定向集，则$\downarrow(a)\cap M(A)$是定向集，$\downarrow(a)\cap M(A)\subseteq M(A)$，于是由命题(2.7.5)可知$M(A)$对定向并封闭. 所以，

$$m=\bigvee(\downarrow(a)\cap M(A))\in M(A).$$

§4.5 连续偏序集

连续偏序集最初是作为连续格概念的一种推广而引进的，随着Lawson-Hoffmann定理的出现，以及与理论计算机科学的关联日益紧密，从而成为连续格理论与其应用的研究中重要课题之一. 对连续偏序集(以及连续格)的论述有多种途径，本书采用

的方法受到了完全分配格的极小集理论的影响，以及结合Scott拓扑的基本性质，所以能较简单地导出主要结果。

偏序集A的全体理想之集$Idl(A)$一般不必是格，但是依然可以定义标准嵌入映射

$$\downarrow(-): A \longrightarrow Idl(A)$$
$$a \longmapsto \downarrow(a).$$

(4.5.1)**命题** 设$(A, \leqslant)$是偏序集，则嵌入映射

$$\downarrow(-): A \longrightarrow Idl(A)$$

有左伴随当且仅当A中任意定向集有上确界。

证明 假定映射

$$\downarrow(-): A \longrightarrow Idl(A)$$

有左伴随

$$c: Idl(A) \longrightarrow A,$$

则对于任意定向集$S \subseteq A$，$\downarrow(S)$是A的理想。所以，由伴随定义可知$\forall a \in A$，有

$$c(\downarrow(S)) \leqslant a \Longleftrightarrow \downarrow(S) \subseteq \downarrow(a).$$

由此得到

$$\bigvee S = \bigvee \downarrow(S) = c(\downarrow(S)) \in A,$$

即A有定向并。

反之，若A有定向并，则A的每个理想都有上确界，从而定义了一个映射

$$\bigvee_A: Idl(A) \longrightarrow A.$$

容易验证这就是$\downarrow(-): A \longrightarrow Idl(A)$的左伴随。

(4.5.2)**推论** 若A是并半格，则$\downarrow(-): A \longrightarrow Idl(A)$有左伴随当且仅当$A$是完备格。

假设$(A, \leqslant)$是有定向并的偏序集，则由命题(4.5.1)可知映射

$$\downarrow(-): A \longrightarrow Idl(A)$$

有左伴随

$$\bigvee_A: Idl(A) \longrightarrow A.$$

于是自然提出一个问题：在什么条件下，映射$\bigvee_A$也有左伴随？通过对伴随定义的分析可以看出，应该满足的条件是：$\forall a\in A$，存在满足$a\leqslant\bigvee_A I$的最小理想I。为了更方便地表述这个条件，现引入以下概念。

(4.5.3) **定义** 设$(A,\leqslant)$是有定向并的偏序集，则A上关系$\ll$(称为way below关系)定义为：$\forall a,b\in A, a\ll b\Longleftrightarrow\forall I\in Idl(A)$，若$b\leqslant\bigvee I$，则$a\in I$。容易看出，对于$a$，$b\in A$，则

$a\ll b\Longleftrightarrow$对于满足$b\leqslant\bigvee S$的任意定向集$S$，

存在$s\in S$，使得$a\leqslant s$。

于是上述$\bigvee_A$有左伴随的条件可归纳如下：

(4.5.4) **命题** 设A是有定向并的偏序集，则映射$\bigvee_A: Idl(A)\longrightarrow A$有左伴随当且仅当$\forall a\in A$，集$\{b\in A\mid b\ll a\}$是理想，并且

$$a=\bigvee\{b\in A\mid b\ll a\}.$$

对于有定向并的偏序集A，$a\in A$，记

$$\Downarrow(a)=\{b\in A\mid b\ll a\}$$

与

$$\Uparrow(a)=\{b\in A\mid a\ll b\}.$$

(4.5.5) **命题** 设$(A,\leqslant)$是有定向并的偏序集，则

(i) 设a，$b\in A$，若$b\ll a$，则$b\leqslant a$；

(ii) 设$a\in A$，则$a\ll a$当且仅当（在命题(3.4.2)中(ii)或(iii)的意义下）a是有限元；

(iii) 设a，$a',b,b'\in A$，若$b'\leqslant b\ll a\leqslant a'$，则$b'\ll a'$；

(iv) 若A有有限并，则$\forall a\in A$，$\Downarrow(a)\in Idl(A)$。

证明 (i)，(ii)与(iii)都是定义的直接推论。

(iv) 因为A有有限并，从而A有最小元0。对于$a\in A$，则因定向集总是非空的，于是$0\ll a$，即$\Downarrow(a)\neq\phi$。根据(iii)，则知$\Downarrow(a)$是下集。设$b,c\in\Downarrow(a)$，即$b\ll a$与$c\ll a$，则对于满足$a\leqslant\bigvee S$的A中任意定向集S，存在$s_1,s_2\in S$使得$b\leqslant s_1, c\leqslant s_2$，又因为$S$是定向

集，从而存在$s\in S$使得$s_1\leqslant s, s_2\leqslant s$。但是$A$有有限并，于是$b\vee c\leqslant s$。所以，$\Downarrow(a)$是定向集。综上所证，则知$\Downarrow(a)$是$A$的理想。

特别地，由命题(4.5.5)（i）可知：$\forall a\in A$，

$$\Downarrow(a)\subseteq\downarrow(a) \quad 与 \quad \Uparrow(a)\subseteq\uparrow(a).$$

(4.5.6) 定义 设A是有定向并的偏序集。若$\forall a\in A$，$\Downarrow(a)\in Idl(A)$与$a=\vee\Downarrow(a)$，则称A是连续偏序集。

(4.5.7) 注 根据命题(4.5.5)，则知定义(4.5.6)中要求$\Downarrow(a)\in Idl(A)$可换为$\Downarrow(a)$是定向集。

(4.5.8) 例 设$(A,\leqslant)$是偏序集，则$Idl(A)$是连续偏序集。

证明 设$(A,\leqslant)$是偏序集。显然，$Idl(A)$就集包含关系是偏序集。

设$\{I_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}\subseteq Idl(A)$是定向集，则

$$\begin{aligned}&\vee_{Idl(A)}\{I_\alpha\mid \alpha\in\Gamma\}\\ &=\bigcup\{I_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}\in Idl(A).\end{aligned}$$

所以，$Idl(A)$是有定向并的偏序集。

对于$I\in Idl(A)$，则易证$\Downarrow(I)$是定向集。于是由注(4.5.7)可知$\Downarrow(I)\in Idl(A)$。又

$$\begin{aligned}I&=\bigcup\{\downarrow(x)\mid x\in I\}\\ &=\vee_{Idl(A)}\{\downarrow(x)\mid x\in I\}\\ &\leqslant\vee_{Idl(A)}\{J\mid J\in Idl(A),\ J\ll I\}\end{aligned}$$

（根据A的主理想都是$Idl(A)$的有限元）

$$=\vee\Downarrow(I).$$

但是$\vee\Downarrow(I)\leqslant\vee\downarrow(I)=I$（根据$\Downarrow(I)\subseteq\downarrow(I)$），所以

$$I=\vee\Downarrow(I).$$

综上所证，则知$Idl(A)$是连续偏序集。

(4.5.9) 定义 设A是连续偏序集。若存在偏序集B，使得$A=Idl(B)$，则称A是代数偏序集。

(4.5.10) 定理（插值性质） 设A是连续偏序集，又设a，$b\in$

$A, a \ll b$，则存在$c \in A$，使得$a \ll c \ll b$。

证明 令

$$S = \{d \in A \mid \exists c \in A，使得 d \ll c \ll b\}.$$

由$a \ll b$与$\Downarrow(a) \in Idl(A)$可知存在$d \in A$满足$d \ll a \ll b$，从而$d \in S$，于是$S \neq \phi$。以下证明S是定向集：任取$d_1, d_2 \in S$，则存在$c_1, c_2 \in A$，使得

$$d_1 \ll c_1 \ll b, \quad d_2 \ll c_2 \ll b.$$

因为$c_1, c_2 \in \Downarrow(b)$，$\Downarrow(b)$是定向集，于是存在$c_3 \in \Downarrow(b)$，使得

$$d_1 \ll c_1 \leqslant c_3, \quad d_2 \ll c_2 \leqslant c_3, \quad c_3 \ll b.$$

由此即知$d_1 d_2 \in \Downarrow(c_3)$。故由$\Downarrow(c_3)$也是定向集可知存在$d_3 \in \Downarrow(c_3)$，满足

$$d_3 \ll c_3, \quad d_1 \leqslant d_3, \quad d_2 \leqslant d_3.$$

但是$d_3 \ll c_3 \ll b$，所以，$d_3 \in S$，即S为定向集。

因为

$$\bigvee S = \bigvee \{d \in A \mid \exists c \in A, d \ll c \ll b\}$$
$$= \bigvee \{\bigvee \Downarrow(c) \mid c \ll b\} = \bigvee \Downarrow(b) = b,$$

并且$a \ll b$，于是存在$d \in S$，使得$a \leqslant d$。从而由S的定义可知存在$c \in A$，满足

$$d \ll c \ll b.$$

所以，由命题(4.5.5)(iii)即知

$$a \ll c \ll b.$$

在连续偏序集研究中的一个关键因素是其上的Scott拓扑（定义见(3.7.6)），下面的定理(4.5.11)汇集了Scott拓扑的基本性质。

(4.5.11) **定理** 设A是连续偏序集，$\Sigma(A)$为A上Scott拓扑，则

(i) 集族$\{\Uparrow(a) \mid a \in A\}$形成$\Sigma(A)$的基；

(ii) 若$U \subseteq A$是上集，则关于Scott拓扑，

$$int(U) = \{a \in U \mid \exists b \in U, b \ll a\}$$

$= \bigcup\{\Uparrow(a) \mid a\in U\}$；

(iii) $\forall a\in A$, $\uparrow(a) = \bigcap\{U \mid U \in\sum(A),\ a\in U\}$.

证明 （i）设$a\in A$. 显然$\Uparrow(a)$是上集. 若$S\subseteq A$是定向集，$b=\bigvee S\in\Uparrow(a)$，则$a\ll b$. 从而由插值性质可知存在$c\in A$，满足$a\ll c\ll b$. 于是存在$s\in S$使得$c\leqslant s$. 故由$a\leqslant a\ll c\leqslant s$可知$a\ll s$. 即$S\cap\Uparrow(a)\neq\phi$. 所以，$\Uparrow(a)\in\sum(A)$.

设U是任意Scott开集. 任取$x\in U$，因为$\Downarrow(x)$是定向集，$x=\bigvee\Downarrow(x)\in U$，于是存在$a\in\Downarrow(x)\cap U$. 但$U$是上集，从而

$$x\in\Uparrow(a)\subseteq\uparrow(a)\subseteq U.$$

所以，$\{\Uparrow(a) \mid a\in A\}$是$\Sigma(A)$的基.

（ii）令

$T=\{a\in U \mid \exists b\in U,\ b\ll a\}=\bigcup\{\Uparrow(a) \mid a\in U\}$，则由（i）可知$T\in\Sigma(A)$. 假设存在$a\in U-T$，则$\forall b\in\Downarrow(a)$，有$b\notin U$（否则，由$b\in U$可知$a\in\Uparrow(b)\subseteq T$. 这与假设$a\in U-T$矛盾）. 从而根据（i）可知$a\notin int(U)$. 这表明$int(U)\subseteq T$. 另一方向的包含关系是明显的. 所以，（ii）成立.

(iii) 设$a\in A$，对于$U\in\Sigma(A)$，则由U是上集可知

$$\uparrow(a)\subseteq\bigcap\{U \mid U\in\Sigma(A),\ a\in U\}.$$

反之，若$b\in\bigcap\{U \mid U\in\Sigma(A), a\in U\}$，则$\forall d\in\Downarrow(a)$，有$b\in\Uparrow(d)$，从而$d\leqslant b$. 于是

$$a=\bigvee\Downarrow(a)\leqslant b,$$

即$b\in\uparrow(a)$. 故得$\uparrow(a)\supseteq\bigcap\{U \mid U\in\Sigma(A),\ a\in U\}$. 所以，(iii) 成立.

(4.5.12) **定理** 设A是连续偏序集，又设$a,b\in A$，$a\not\leqslant b$，则存在Scott开滤子F使得

$$a\in F,\ b\notin F.$$

证明 因为$a=\bigvee\Downarrow(a)\not\leqslant b$，故存在$c\in A$使得$c\ll a$，$c\not\leqslant b$. 根据插值性质，则存在$d_0\in A$，满足

$$c \ll d_0 \ll a.$$

用归纳法反复地使用插值性质，则存在A的元序列$(d_0, d_1 \cdots)$，使得对于$n = 0, 1, 2, \cdots$，有

$$c \ll d_{n+1} \ll d_n \ll a. \tag{1}$$

令 $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Uparrow (d_n)$，则由定理（4.5.11）（ i ）可知$F$是Scott开的。

另外，由于对于$n = 0, 1, 2, \cdots$，有$\Uparrow (d_n) \subseteq \uparrow (d_n)$，从而

$$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Uparrow (d_n) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \uparrow (d_n).$$

但是由（1）式可知，对于$n = 0, 1, 2, \cdots$，有$\uparrow (d_n) \subseteq \Uparrow (d_{n+1})$，因此

$$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} \uparrow (d_n)$$

是滤子。此外，因为$d_0 \ll a$，从而$a \in F$。但是$d_n \not\leqslant b$ $(n = 0, 1, \cdots)$，所以，$b \notin F$。证毕。

§4.6 连续偏序集的特征

(4.6.1)**引理** 设A是连续偏序集，$e: A \to A$是Scott连续的幂等映射（即e关于Scott拓扑连续，$e^2 = e$），则$e(A)$作为A的子偏序集也是连续偏序集。

证明 令$B = e(A) \subseteq A$。先证明B对于A中的定向并封闭。为此假设$S \subseteq B$是定向集，则作为A中的定向集，$\bigvee_A S$存在。因为e是Scott连续的（即保定向并，见命题(3.7.9)），从而

$$\begin{aligned} e(\bigvee_A S) &= \bigvee_A \{e(s) \mid s \in S\} \\ &= \bigvee_A \{s \mid s \in S\} \text{（根据} S \subseteq B,\ e^2 = e\text{）} \\ &= \bigvee_A S. \end{aligned}$$

于是$\bigvee_B S = e(\bigvee_A S) = \bigvee_A S$。但是$e(\bigvee_A S) \in B$，所以，$B$对于定向

并封闭。

设$b\in B$．若对于$a\in A$，在A中有$a\ll_A b$，则对于B中的定向集S，当

$$b\leqslant\bigvee_B S=\bigvee_A S$$

时，存在$s\in S$，使得$a\leqslant s$．从而

$$e(a)\leqslant e(s)=s,$$

即在B中，$e(a)\ll_B b$．所以，

$$\begin{aligned}b&=e(b)\\&=e(\bigvee_A\{a\in A\mid a\ll_A b\})\\&=\bigvee_A\{e(a)\mid a\ll_A b\}\\&=\bigvee_B\{e(a)\mid a\ll_A b\}\\&\leqslant\bigvee_B\{c\in B\mid c\ll_B b\},\end{aligned}$$

即$b=\bigvee_B \Downarrow_B(b)$．余下证明$\Downarrow_B(b)$是理想．显然，$\Downarrow_B(b)$是下集．因为$\Downarrow_A(b)$是$A$中的定向集，从而集$e(\Downarrow_A(b))=\{e(a)\mid a\ll_A b\}\subseteq B$是定向集，并且

$$b=\bigvee_B\{e(a)\mid a\leqslant_A b\}.$$

假定c_1，$c_2\in\Downarrow_B(b)$，即$c_i\in B, c_i\ll_B b\ (i=1,2)$，则存在$a_i\in A$，$a_i\ll_A b$使得$c_i\leqslant e(a_i)\ (i=1,2)$．由于集$\{e(a)\mid a\ll_A b\}$是定向集，于是存在$a_3\in A$，$a_3\ll_A b$，使得

$$c_1\leqslant e(a_1)\leqslant e(a_3),\quad c_2\leqslant e(a_2)\leqslant e(a_3).$$

但是$e(a_3)\in B$，$e(a_3)\ll_B b$，所以$\Downarrow_B(b)$是定向集．证毕．

(4.6.2) **定理** 设A是有定向并的偏序集，则A是连续偏序集当且仅当A同构于某个代数偏序集关于一个Scott连续映射的收缩核．

证明 设A是连续偏序集，则由命题(4.5.4)可知映射

$$\bigvee_A: Idl(A)\to A,\quad \Downarrow(-): A\to Idl(A)$$

都有右伴随．从而都是Scott连续的，並且$\forall a\in A$,

$$a=\bigvee_A\Downarrow(a)=id_A(a).$$

所以，A是$Idl(A)$关于Scott连续映射$\bigvee_A$的收缩核(视A通过

$\downarrow(-)$嵌入在$Idl(A)$中)。

反之，假定A是(或同构于)某个代数偏序集B的收缩核，即存在Scott连续映射

$$f: B \to A$$

使得$fi = id_A$，其中$i: A \to B$为包含映射．令

$$e = if,$$

则$e: B \to B$是幂等的Scott连续映射，并且$e(B) = A$。所以.由引理(4.6.1)可知A是连续偏序集．证毕。

下面将极小集的思想（见第2章§2.10）引进连续偏序集中，从而给出一种极小集式刻划．这个刻划在本章后面将有重要应用．

(4.6.3)**定义**　设A是有定向并的偏序集，$a \in A$，并且$D \subseteq A$是定向集．若$\bigvee D = a$，$D \subseteq \downarrow(a)$，则称$D$是$a$的一个拟极小集．

(4.6.4)**定理**　设A是有定向并的偏序集，则下列条件等价：

(i) A是连续偏序集；

(ii) $\forall a \in A, a$有拟极小集；

(iii) $\forall a \in A$，存在定向集$D \subseteq A$，满足$\bigvee D = a$，并且

$$\uparrow(a) = \bigcap\{\Uparrow(d) \mid d \in D\}.$$

证明　(i)⇒(ii)显然．

(ii)⇒(iii) 设D是a的拟极小集，则$\forall d \in D$，$d \in \downarrow(a)$，从而$\uparrow(a) \subseteq \Uparrow(d)$。于是

$$\uparrow(a) \subseteq \bigcap\{\Uparrow(d) \mid d \in D\}.$$

反之，若$x \in \bigcap\{\Uparrow(d) \mid d \in D\}$，则

$$x \geqslant \bigvee D = a.$$

所以，(iii)成立．

(iii)⇒(ii) 设定向集$D \subseteq A$满足$\bigvee D = a$，并且

$$\uparrow(a) = \bigcap\{\Uparrow(d) \mid d \in D\}.$$

若$S\subseteq A$是定向集，$a\leqslant\bigvee S$，则

$$\bigvee S\in\uparrow(a)=\bigcap\{\Uparrow(d)\mid d\in D\},$$

于是$\forall d\in D$，$d\ll\bigvee S$，即存在$s\in S$,使得$d\leqslant s$，从而$D\subseteq\Downarrow(a)$．所以，D是a的拟极小集．

(ii)$\Rightarrow$(i) 对于$a\in A$，用F_a表示a的全体拟极小集构成的集族．由假设，$F_a\neq\phi$，容易验证$\Downarrow(a)=\bigcup F_a$为定向集，并且$a=\bigvee\Downarrow(a)$．即(i)成立．

(4.6.5) **定理** 设A是有定向并的偏序集．若A满足条件：

(i) A有插值性质：若$a,b\in A$，$a\ll b$，则存在$c\in A$，使得$a\ll c\ll b$；

(ii) 集族$\{\Uparrow(a)\mid a\in A\}$构成$\Sigma(A)$的基；

(iii) $\forall a\in A$，$\uparrow(a)=\bigcap\{U\mid U\in\Sigma(A)，a\in U\}$，

则A是连续偏序集．

证明 设$a\in A$,先证$\Downarrow(a)\in Idl(A)$：假定$b_1,b_2\in\Downarrow(a)$,则$a\in\Uparrow(b_1)\cap\Uparrow(b_2)$．由条件(ii)，则存在$b_3\in A$，使得

$$a\in\Uparrow(b_3)\subseteq\Uparrow(b_1)\cap\Uparrow(b_2).$$

于是$b_3\ll a$．再由条件(i)，则存在$c\in A$满足$b_3\ll c\ll a$．从而

$$c\in\Uparrow(b_3)\subseteq\Uparrow(b_1)\cap\Uparrow(b_2).$$

于是，$c\in\Downarrow(a)$，$b_1\leqslant c$，$b_2\leqslant c$．即$\Downarrow(a)$是定向集．但$\Downarrow(a)$是下集,所以$\Downarrow(a)\in Idl(A)$．

将条件(ii)，(iii)结合可以看出，$\forall a\in A$，有

$$\begin{aligned}\uparrow(a)&=\bigcap\{U\mid U\in\Sigma(A)，a\in U\}\\&\subseteq\bigcap\{\Uparrow(b)\mid a\in\Uparrow(b)\}\\&=\bigcap\{\Uparrow(b)\mid b\in\Downarrow(a)\}.\end{aligned}\qquad(1)$$

令$x=\bigvee\Downarrow(a)$，对于$b\in\Downarrow(a)$，则由条件(i)可知存在$c_0\in A$，使得$b\ll c_0\ll a$，于是

$$b\ll c_0\leqslant\bigvee\{c\in A\mid b\ll c\ll a\}\leqslant x,$$

即$b\ll x$．这表明$x\in\bigcap\{\Uparrow(b)\mid b\in\Uparrow(a)\}$．现在假设$a\in U$，$U\in\Sigma(A)$，则由条件(ii)可知存在$b\in A$使得$a\in\Uparrow(b)\subseteq U$．

从而$x\in\Uparrow(b)\subseteq U$. 于是

$$x\in\bigcap\{U\mid U\in\Sigma(A),\ a\in U\}=\uparrow(a),$$

即$x\geqslant a$. 所以，A是连续偏序集.

下面引进一个连续偏序集为对象的范畴，该范畴与定义(2,10,9)中引入的范畴CD有着密切的关系.

(4.6.6) **定义** 范畴$ContP$定义如下：其对象为连续偏序集；并且对于连续偏序集A与B，映射$f: A\to B$是$ContP$中态射当且仅当f保定向并与f保关系$\ll$. 即f为Scott连续的，并且对于$a,b\in A$，若在A中$a\ll b$，则在B中$f(a)\ll f(b)$.

(4.6.7) **定理** 设$f: A\to B$是连续偏序集之间的保序映射，则以下条件等价：

(i) f是$ContP$中态射；

(ii) f保定向并，并且$\forall a\in A$，$f(\Uparrow(a))\subseteq\Uparrow(f(a))$；

(iii) f保定向并，并且$\forall a\in A$，$f(\Downarrow(a))\subseteq\Downarrow(f(a))$；

(iv) $\forall a\in A$，f将a在A中的拟极小集映射成$f(a)$在B中的拟极小集；

(v) f保定向并，並且$\forall a\in A$，有

$$\uparrow(f(a))=\bigcap\{\Uparrow(f(d))\mid d\in\Downarrow(a)\};$$

(vi) f是Scott连续的，并且$\forall U\in\Sigma(A)$，有$\uparrow(f(U))\in\Sigma(B)$；

(vii) f是Scott连续的，并且f^{-1}: $\Sigma(B)\to\Sigma(A)$是完备格同态；

(viii) f是Scott连续的，并且f^{-1}: $\Sigma(B)\to\Sigma(A)$既有左伴随又有右伴随.

证明 条件(i)、(ii)、(iii)的等价性是明显的.

(iii)$\Rightarrow$(iv) 设$D\subseteq A$是a的一个拟极小集，则有$\bigvee D=a$，$D\subseteq\Downarrow(a)$. 因为f保定向并，于是$f(D)$也是定向集，并且

$$\bigvee f(D)=f(\bigvee D)=f(a).$$

此外，由条件(iii)可知

$$f(D)\subseteq f(\Downarrow(a))\subseteq\Downarrow(f(a)).$$

所以，$f(D)$是$f(a)$的拟极小集.

(iv)⇒(v) 设$S\subseteq A$是定向集. 记$d=\bigvee S$，因为f保序，于是$f(S)$是B中的定向集，并且

$$\bigvee f(S)\leqslant f(d).$$

由于$\Downarrow(d)$是d的拟极小集，从而由条件 (iv) 可知$f(\Downarrow(d))$是$f(d)$的拟极小集. 若$a\in A$满足$a\ll d$，则存在$s\in S$使得$s\geqslant a$. 因而$f(s)\geqslant f(a)$，于是

$$\begin{aligned}\bigvee f(S)&=\bigvee\{f(s)\mid s\in S\}\\&\geqslant\bigvee\{f(a)\mid a\in A,\ a\ll d\}\\&=\bigvee f(\Downarrow d))=f(d).\end{aligned}$$

所以，f保定向 并. 再由定理(4.6.4)可得

$$\begin{aligned}\uparrow(f(a))&=\bigcap\{\Uparrow(x)\mid x\in\Downarrow(f(a))\}\\&=\bigcap\{\Uparrow(x)\mid x\in f(\Downarrow(a))\}\\&=\bigcap\{\Uparrow(f(d))\mid d\in\Downarrow(a)\}.\end{aligned}$$

(v)⇒(i) 假定在A中有$a\ll b$，则由条件(v)可得

$$f(b)\in\uparrow(f(b))=\bigcap\{\Uparrow(f(d))\mid d\in\Downarrow(b)\}.$$

但是$a\in\Downarrow(b)$，所以$f(a)\ll f(d)$.

(v)⇒(vi) 设$U\in\Sigma(A)$，$S\subseteq B$是定向集，并且满足$\bigvee S\in\uparrow(f(U))$，则存在$a\in U$，使得$\bigvee S\geqslant f(a)$. 于是由(v)可知$\forall d\in\Downarrow(a)$，$f(d)\ll\bigvee S$，从而存在$s\in S$使得$f(d)\leqslant s$. 因为$U$是Scott开的，並且$\bigvee\Downarrow(a)=a\in U$，从而存在$d_0\in U\cap\Downarrow(a)$.于是对于$d_0$，存在相应的$s_0\in S$，使得$f(d_0)\leqslant s_0$. 因此，$s_0\in S\cap\uparrow f(U)$. 即$S\cap\uparrow f(U)\neq\phi$. 所以，$\uparrow f(U)\in\Sigma(B)$.

(vi)⇒(vii) 因为f是Scott连续的，于是映射

$$f^{-1}:\Sigma(B)\to\Sigma(A)$$

是frame同态. 现在对于$U\in\Sigma(A)$，$V\in\Sigma(B)$，则

$$\begin{aligned}U\subseteq f^{-1}(V)&\Longleftrightarrow f(U)\subseteq V\\&\Longleftrightarrow\uparrow f(U)\subseteq V,\end{aligned}$$

从而映射

$$\uparrow f: \Sigma(A) \to \Sigma(B)$$

是映射f^{-1}的左伴随，于是f^{-1}还保任意交。所以，f^{-1}是完备格同态。

(vii)$\Longleftrightarrow$(viii) 这由伴随函子定理即证。

(viii)$\Rightarrow$(ii) 设$a\in A$，则由定理(4.5.11)可知

$$\uparrow(f(a)) = \bigcap\{V\in\sum(B) \mid f(a)\in V\}.$$

两边同时关于Scott拓扑取内部，则给出

$$\Uparrow(f(a)) = \bigwedge_{\Sigma(B)}\{V \mid V\in\sum(B),\ f(a)\in V\}.$$

于是用f^{-1}作用后得到

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\Uparrow(f(a))) &= f^{-1}(\bigwedge_{\Sigma(B)}\{V \mid V\in\sum(B),\ f(a)\in V\} \\
&= \bigwedge_{\Sigma(A)}\{f^{-1}(V) \mid V\in\sum(B),\ f(a)\in V\} \\
&\quad (\text{根据}f\text{保任意交}) \\
&= \bigwedge_{\Sigma(A)}\{f^{-1}(V) \mid V\in\sum(B),\ a\in f^{-1}(V)\} \\
&\supseteq \bigwedge_{\Sigma(A(}\{U \mid U\in\Sigma(A),\ a\in U\} \\
&= \Uparrow(a).
\end{aligned}$$

所以，$f(\Uparrow(a))\subseteq\Uparrow(f(a))$。

本章后面还将论及连续偏序集的另一种态射，即Lawson映射。

§ 4.7 连续偏序集的Lawson-Hoffmann理论

本节讨论连续偏序集的 Lawson-Hoffmann理论，它阐明了连续偏序集与完全分配格之间的对应关系。

(4.7.1) **定理** 设A是连续偏序集，$\Sigma(A)$是A上Scott 拓扑，则$(A,\ \Sigma(A))$是Sober 空间，并且$pt^o(\Sigma(A))\cong A^{op}$。

证明 根据Scott拓扑定义可知，$\forall a\in A$，$\downarrow(a)=cl\{a\}$。于是只需证明$\Sigma(A)$的素元都是$A-\downarrow(u)$的形式，其中$u\in A$。

设$U\in pt^o(\Sigma(A))$，记$F=A-U$。下面证明F有 最大元。令

$$F^* = \{a \in F \mid \text{存在} b \in F，\text{使得} a \ll b\}$$
$$= \bigcup \{\Downarrow(a) \mid a \in F\}$$
$$= \Downarrow(F).$$

设a，$b \in F^*$，则必有

$$\Uparrow(a) \cap \Uparrow(b) \cap F \neq \phi. \qquad (1)$$

假定(1)式不成立，即

$$\Uparrow(a) \cap \Uparrow(b) \subseteq A - F = U.$$

因为U是素元，并且$\Uparrow(a)$，$\Uparrow(b) \in \sum(A)$，于是

$$\Uparrow(a) \subseteq U，\text{或者} \Uparrow(b) \subseteq U.$$

由F^*的定义，则存在a_1，$b_1 \in F$，使得$a \ll a_1$，$b \ll b_1$，即$a_1 \in \Uparrow(a)$，$b_1 \in \Uparrow(b)$。于是a_1，b_1中至少有一个含在U中，这是不可能的。因此(1)式成立。

设$x \in F \cap \Uparrow(a) \cap \Uparrow(b)$，则$x \in F$，并且$a, b \in \Downarrow(x)$。但$\Downarrow(x)$是定向集，于是存在$c \in \Downarrow(x)$满足

$$a \leqslant c，b \leqslant c.$$

因为$c \in F^*$(根据$x \in F, c \ll x$)，从而F^*是定向集。于是$\bigvee F^* \in A$。令

$$u = \bigvee F^*,$$

由于F是Scott闭集，从而F对定向并封闭，並且

$$F^* = \Downarrow(F) \subseteq \downarrow(F) = F,$$

故$u \in F$。又对于任意$a \in F$，有$\Downarrow(a) \subseteq F^*$，因而

$$a = \bigvee \Downarrow(a) \leqslant \bigvee F^* = u,$$

即u是F的最大元，于是$F = \downarrow(u)$。因此$U = A - \downarrow(u)$。所以

$$pt^0(\sum(A)) = \{A - \downarrow(a) \mid a \in A\}$$

综上所证，则知$(A, \sum(A))$是Sober空间。

定义映射 $\theta: pt^0(\Sigma(A)) \to A$

$$U \mapsto \bigvee (A - U).$$

容易验证，θ是一个反序的双射。证毕。

(4.7.2) **定理** 设A是连续偏序集，则$\Sigma(A)$是完全分配格。

证明 设$U \in \Sigma(A)$，由定理(4.5.11)可知

$$U = int(U) = \bigcup\{\Uparrow(u) \mid u \in U\}.$$

记$\beta(U) = \{\Uparrow(u) \mid u \in U\}$，则$\beta(U) \subseteq \Sigma(A)$。若

$$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\} \subseteq \Sigma(A)$$

是满足$U \subseteq \bigcup\{U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$的任意 Scott开集族，则$\forall u \in U$，存在$\alpha \in \Gamma$使得$u \in U_\alpha$。但$U_\alpha$是上集，从而

$$\Uparrow(u) \subseteq \uparrow(u) \subseteq U_\alpha,$$

于是$\beta(U)$是U的一个极小集。所以，由定理(2.10.13)可知$\Sigma(A)$是完全分配格。

(4.7.3) **定理** 设A是完全分配格，则$pt^0(A)$是连续偏序集，并且$A \cong \Sigma(pt^0 A)$

证明 由定理(2.10.8)可知A^{op}也是完全分配格，并且$pt^0(A^{op}) = M(A)$。所以，为证$pt^c(A)$是连续偏序集，只需证明$M(A)$是连续偏序集。

根据命题(2.7.5)，则$M(A)$是有定向并的偏序集。设$m \in M(A) \subseteq A$，由定理(4.4.9)可知m的最大分子极小集$\beta^*(m)$是定向集。由此不难看出，$\beta^*(m)$即是m在$M(A)$中的拟极小集(事实上，$\beta^*(m) = \Downarrow_{M(A)}(m)$)。所以，由定理(4.6.4)可知$M(A)$是连续偏序集。

由定理(4.4.4)可知A作为 frame 是空间式的，从而有

$$A \cong \Omega(pt^0 A).$$

于是只需再证明：

$$\Omega(pt^0 A) = \sum(pt^0 A).$$

由定理(3.7.8)，则有$\Omega(pt^0 A) \subseteq \sum(pt^0 A)$。反之，从定理(4.7.1)的证明已经看出，

$$pt^0(\Sigma(pt^0(A))) = \{pt^0(A) - \downarrow(p) \mid p \in pt^0(A)\},$$

于是

$$pt^0(\Sigma(pt^0 A)) \subseteq \Omega(pt^0 A).$$

但是$\Sigma(pt^0(A))$和$\Omega(pt^c A)$都是完全分配格，所以，

$$A \cong \Omega(pt^0(A)) = \Sigma(pt^0(A)),$$

(4.7.4) **注** 定理(4.7.2)与定理(4.7.3)表明：完全分配格恰是连续偏序集的Scott拓扑.

(4.7.5) **定义** 设A是连续偏序集. 称

$$\hat{A} = pt^0(\sum(A)^{op}) = M(\sum(A))$$

为A的(Lawson)对偶.

由定理(4.7.2)和定理(4.7.3)可知A的对偶$\hat{A}$仍是连续偏序集. $\hat{A}$实际上是$\Sigma(A)$的全体余素元之集. 所以，在讨论对偶性理论之前，首先应搞清楚$\Sigma(A)$中余素元的构造.

(4.7.6) **命题** 设A是有定向并的偏序集，$U \in \sum(A)$，则$U \in M(\Sigma(A))$当且仅当U是滤子.

证明 设$U \in \sum(A)$不是滤子，于是存在$c_1, c_2 \in U$，使得$\{c_1, c_2\}$在U中无下界. 又集

$$C_1 = \{x \in U \mid x \not\leqslant c_1\},\quad C_2 = \{x \in U \mid x \not\leqslant c_2\}$$

都是U的真子集，并且满足

$$U = C_1 \cup C_2.$$

另外，对于$i = 1, 2$,

$$C_i = U - \downarrow(C_i) = U - cl\{C_i\}$$

都是 Scott 开集. 所以，U不是余素元.

反之，设U是Scott开滤子，并且V，$W \in \sum(A)$满足

$$U = V \cup W,\quad V \subseteq U,\quad W \subseteq U.$$

若$V \neq U$，$W \neq U$，任取$v \in U - V$与$w \in U - W$，则由U是余定向集可知存在$u \in U$，使得

$$u \leqslant v,\quad u \leqslant w.$$

但是$u \in U = V \cup W$，从而u在V中，或者在W中. 这是不可能的. 所以，U是余素元.

(4.7.7) **定理** 设A是连续偏序集，则有标准同构$A \to \hat{\hat{A}}$.

证明 由于$\hat{A}$也是连续偏序集，从而由定理(4.7.2)和定理(4.7.3)可知

$$\sum(\hat{A}) = \sum(pt^0(\sum(A)^{op}))$$

$$\cong \Omega(pt^0(\sum(A)^{op}))$$
$$\cong \sum(A^0)^p,$$

于是，

$$\sum(\hat{A})^{op} \cong \sum(A).$$

再根据对偶的定义，有

$$\hat{\hat{A}} = pt^0(\Sigma(\hat{A})^{op}) \cong pt^0(\Sigma(A)).$$

所以，

$$\Sigma(\hat{\hat{A}}) \cong \Sigma(pt^0(\Sigma(A)))$$
$$= \Omega(pt^0(\Sigma(A)))$$
$$\cong \Sigma(A).$$

由定理(4.7.1)，则知

$$\hat{\hat{A}}^{op} \cong pt^0(\sum(\hat{\hat{A}}))$$
$$\cong pt^0(\Sigma(A))$$
$$\cong A^{op},$$

或者 $\hat{\hat{A}} \cong A.$

最后，可以验证同构$\hat{\hat{A}} \to A$是自然的.

(4.7.8) **定义** 设$f: A \to B$是连续偏序集之间的映射. 若f是Scott连续的,并且$f^{-1}: \Sigma(B) \to \Sigma(A)$保开滤子, 则 称$f$是Lawson映射. 以连续偏序集为对象，以Lawson映射为态射构成一 个范畴，记为$\boldsymbol{ContPos}$.

(4.7.9) **定理** (连续偏序集的Lawson对偶定理) 范畴$\boldsymbol{ContPos}$是自对偶范畴，即

$$\boldsymbol{ContPos} \cong \boldsymbol{ContPos}^{op}.$$

证明 设$f: A \to B$是Lawson映射，则

$$f^{-1}: \Sigma(B) \to \Sigma(A)$$

保开滤子(或者由命题 (4.7.6) 得 f^{-1} 保余素 元). 于是根据命题(3.3.4)的对偶命题可知f^{-1}的右伴随

$$(f^{-1})^*: \Sigma(A) \to \Sigma(B)$$

是余frame同态(即保有限并和保任意交)，从而对应有一个frame

同态

$$(\widehat{f^{-1}})^*:\Sigma(A)^{op}\to\Sigma(B)^{op}.$$

由命题(3.3.4)可知，此映射保素元。令

$$\hat{f}=(\widehat{f^{-1}})^*|pt^0(\sum(A^{op}),$$

则给出一个Scott连续映射

$$\hat{f}:\hat{B}\to\hat{A}.$$

可以证明,对应$f\mapsto\hat{f}$给出了从$\boldsymbol{ContPos}$到$\boldsymbol{ContPos}^{op}$的同构.

(4.7.10) **定理** 范畴$\boldsymbol{ContP}$与范畴$\boldsymbol{CD}$是对偶等价的。

证明 设$f:A\to B$是$\boldsymbol{ContP}$中态射，则由定理(4.6.7)可知$f^{-1}:\Sigma(B)\to\Sigma(A)$是完备格同态，并且$\Sigma(B)$与$\Sigma(A)$都是完全分配格。所以，$f^{-1}$是$\boldsymbol{CD}$中态射.不难证明：对应$f\mapsto f^{-1}$给出了从$\boldsymbol{ContP}$到$\boldsymbol{CD}$的对偶等价.

§4.8 连续格的构造

从格论的观点看，连续格与完全分配格非常相象，两者分别满足某种形式的完全分配律。因此，完全分配格的一些结构性质可以部分推广到连续格上。本节中几个结构定理在形式上与完全分配格的相应的结构定理是类似的,证明方法也有相似的地方。由于连续格比完全分配格限制少得多，所以不可避免地要涉及一些更深刻的概念和结果，如 Lawson 拓扑，Vietoris 拓扑等。但是，本书省略了有关Vietoris拓扑的内容.

(4.8.1) **定义** 若连续偏序集又是并半格(从而是完备格)，则称之为连续格。若连续偏序集又是交半格，则称之为连续交半格。

(4.8.2) **定理** 设A是完备格，则以下条件等价：

(i) A是连续格；

(ii) $\forall a\in A$, $a=\bigvee\twoheaddownarrow(a)$；

(iii) $\forall a\in A$, a有拟极小集；

(iv) 对于A的任意定向子集族$\{J_i|i\in I\}$，有

$$\bigwedge\{\bigvee J_i \mid i\in I\} = \bigvee\{\bigwedge\{f(i)\mid i\in I\}\mid f\in\Phi\},\qquad (DD)$$

其中

$$\Phi=\{f\mid f: I\to\coprod_{i\in I}J_i,\ \forall i\in I,\ f(i)\in J_i\}.$$

证明 (i)⇔(ii) 显然.

(ii)⇔(iii) 由定理(4.6.4)即知.

(iii)⇔(iv) 与定理(2.10.13)的证明类似.

注意: (i)定理(4.8.2)(iv)中的等式(DD)通常称作定向(完全)分配律.

(ii) 与完全分配格不同的是, 连续格的对偶一般不必是连续格.

(4.8.3) **推论** 分配的连续格是frame.

证明 设A是分配的连续格, 则由定理(4.8.2)可知, 对于$a\in A$及定向集$S\subseteq A$, 有

$$a\wedge(\bigvee S)=\bigvee\{a\wedge s\mid s\in S\}.$$

这与分配性结合即知A满足frame分配律(无限分配律).

(4.8.4) **引理** 设$\{A_r\mid r\in\Gamma\}$是一族有定向并的偏序集.

(i) 若$a=\{a_r\}_{r\in\Gamma}$, $b=\{b_r\}_{r\in\Gamma}\in\prod\{A_r\mid r\in\Gamma\}$, 使得$\forall r\in\Gamma$, $a_r\ll_r b_r$, 并且除去有限多个r外, a_r是A_r中的最小元0_r, 则在$\prod\{A_r\mid r\in\Gamma\}$中, $a\ll b$.

(ii) 若$\forall r\in\Gamma$, A_r都是连续偏序集, 并且除去有限多个r外, A_r都有最小元, 则$\prod\{A_r\mid r\in\Gamma\}$是连续偏序集.

证明 (i) 设$S\subseteq\prod\{A_r\mid r\in\Gamma\}$是定向集, 满足$b\leqslant\bigvee S$. 记

$$\Gamma_0=\{r\in\Gamma\mid a_r\neq 0_r,\text{或者}0_r\text{不存在}\}.$$

由假设, 则Γ_0是Γ的有限子集. 根据$\prod\{A_r\mid r\in\Gamma\}$中偏序的定义, 则$\forall r_0\in\Gamma_0$, 有

$b_{r_0}\leqslant_{r_0}(\bigvee S)_{r_0}$ (($\bigvee S)_{r_0}$表示$\bigvee S$的第r_0个"坐标").

于是存在$s(r_0)\in S$, 使得

$$s(r_0)_{r_0}\geqslant a_{r_0}.$$

又S是定向集, 集$\{s(r)\mid r\in\Gamma_0\}$在$S$中有上界, 记一个上界为

$s\in S$，则这个s满足$s\geqslant a$。所以，$a\ll b$。

（ii）显然，对于$b\in\prod\{A_r|r\in\Gamma\}$，则$\Downarrow(b)$是定向集。若$b=\{b_r\}_{r\in\Gamma}\in\prod\{A_r|r\in\Gamma\}$，则

$$b=\bigvee\{\{a_r\}_{r\in\Gamma}|\forall r\in\Gamma,\ a_r\ll_r b_r\}$$

$$=\bigvee\{\{a_r\}_{r\in\Gamma}|\forall r\in\Gamma, a_r\ll_r b_r,\text{并且除有限个}r\text{外}, a_r=o_r\},$$

于是由（i）可知$b=\bigvee\Downarrow(b)$。所以，$\prod\{A_r|r\in\Gamma\}$是连续偏序集.

(4.8.5) 命题 若A同构于实数单位区间[0,1]的幂的一个闭子交半格，则A是连续格.

证明 因为[0,1]是有最小元的连续格，故由引理(4.8.4)可知[0,1]的任意幂$\prod_s[0,1]$也是连续格。

假定A是(或同构于)$\prod_s[0,1]$的一个闭子交半格，则由单调收敛定理可知嵌入包含映射

$$i:A\to\prod{}_s[0,1]$$

保定向并和保余定向交。此外，i还是交半格同态，从而i保任意交。根据伴随函子定理，则i有左伴随映射

$$r:\prod{}_s[0,1]\to A,$$

并且r保任意并。于是映射

$$e=ir:\prod{}_s[0,1]\to\prod{}_s[0,1]$$

保定向并（即Scott连续）。此外，由于i是单射，并且$ri=id_A$。故$e=ir$是幂等的。根据引理(4.6.1)，则$A=e(\prod_s[0,1])$也是连续偏序集。不难看出A还是并半格.所以，A是连续格。

现设A是连续格，以$KL(A)$记A的全体Scott闭集之族。根据定理(4.7.2)，则

$$KL(A)\cong\sum(A)^{op}$$

是完全分配格。于是由定理(4.3.6)可知$KL(A)$上区间拓扑使之成为紧Hausdorff拓扑格。通过交半格嵌入映射

$$\downarrow(-):A\to KL(A),$$

可以将A视为$KL(A)$的子空间，从而继承了一个Hausdorff拓

扑，使得A成为Hausdorff拓扑交半格.事实上，A还是$KL(A)$的闭子空间.所以，A是紧Hausdorff拓扑交半格.

(4.8.6) **引理** 设A是连续格，则映射

$$\downarrow(-): A \to KL(A)$$

的象关于$KL(A)$上的区间拓扑是闭集.

证明 若$F \in KL(A)$，但是不在映射

$$\downarrow(-): A \to KL(A)$$

的象中，则$\forall a \in A$，$F \neq \downarrow(a)$。特别地，F不能对有限并封闭(否则，由F对定向并封闭(根据F是Scott闭集)可知F有最大元).于是，$F=\phi$，或者存在$a, b \in F$，使得$a \vee b \notin F$.

若$F=\phi$，则$KL(A) - \uparrow(\{0_A\})$是$F$的开邻域，并且与映射$\downarrow(-)$的象不交.

若存在a，$b \in F$，$a \vee b \notin F$，则由A是连续格可知

$$\begin{aligned} a \vee b &= \bigvee \twoheaddownarrow(a) \vee \bigvee \twoheaddownarrow(b) \\ &= \bigvee\{a' \vee b' \mid a' \ll a,\ b' \ll b\}. \end{aligned}$$

因为$A-F$是Scott开集，$a \vee b \in A-F$，从而存在$a' \ll a, b' \ll b$，满足$a' \vee b' \in A-F$，即$a' \vee b' \notin F$. 令

$$\begin{aligned} U &= KL(A) - \downarrow(A - \twoheaduparrow(a')) - \downarrow(A - \twoheaduparrow(b')) - \\ &\quad \uparrow(\downarrow(a' \vee b')) \\ &= KL(A) - (\downarrow(A - \twoheaduparrow(a')) \cup \downarrow(A - \twoheaduparrow(b')) \cup \\ &\quad \uparrow(\downarrow(a' \vee b')). \end{aligned}$$

显然，U关于区间拓扑是开的，并且不难验证：

$$\begin{aligned} U = \{G \in KL(A) \mid\ & G \cap \twoheaduparrow(a') \neq \phi,\ G \cap \twoheaduparrow(b') \neq \phi, \\ & a' \vee b' \notin G\}. \end{aligned}$$

于是$F \in U$.

对于$c \in A$，若$a' \vee b' \leqslant c$，则必有$\downarrow(c) \notin U$.从而可设$a' \vee b' \nleqslant c$. 即$a' \nleqslant c$，或者$b' \nleqslant c$. 于是，当$a' \nleqslant c$时，有

$$\downarrow(c) \cap \twoheaduparrow(a') = \phi;$$

当$b' \nleqslant c$时，有

$$\downarrow(c)\cap\Uparrow(b')=\phi.$$

因此得出$\downarrow(c)\notin U$。所以，U不交映射$\downarrow(-)$的象．即，映射$\downarrow(-):A\to KL(A)$的象关于$KL(A)$上区间拓扑是闭集。

(4.8.7) **定理** 设A是完备格，则下列条件等价：

(i) A是连续格；

(ii) A上有紧Hausdorff拓扑，使得A成为紧Hausdorff拓扑交半格，并且A的全体闭下集之族$KL(A)$是完全分配格；

(iii) A上有紧Hausdorff拓扑，使得A成为紧Hausdorff拓扑交半格，并且A同构于[0，1]的某个幂的闭子交半格；

(iv) A序同构于[0，1]的幂的一个对定向并和任意交封闭的子集。

证明 (i)⇒(ii)由以上讨论与引理(4.8.6)即知．

(ii)⇒(iii) 因为$KL(A)$是完全分配格，故由定理(4.4.6)可知$KL(A)$同构于[0,1]的某个幂的子完备格，又由引理(4.8.6)可知A是$KL(A)$的闭子交半格．所以，A同构于[0，1]的某个幂的闭子交半格。

(iii)⇒(iv) 由单调收敛定理即证。

(iv)⇒(i) 由命题(4.8.5)即证．

注意 在(ii)⇒(iii)的证明中，需使用本书中未证明的一个定理，即定理(4.2.7)。

(4.8.8)**定理**(Urysohn-Lawson引理)设A是紧Hausdorff拓扑交半格，则以下条件等价：

(i) A是连续格；

(ii) 对于$a,\ b\in A,\ a\nleqslant b$，则存在连续的交半格同态$f:A\to[0,1]$，使得$f(a)=1,\ f(b)=0$。

证明 (i)⇒(ii)根据定理(4.8.7)，则存在交半格同态嵌入映射

$$i:A\to\prod_s[0,1].$$

因为在A中$a\nleqslant b$，从而$i(a)\nleqslant i(b)$．于是存在$s\in S$，使得$i(a)_s\nleqslant$

$i(b)_s$，其中$i(a)_s$，$i(b)_s$分别表示$i(a)$，$i(b)$的第s个坐标。若p_s：$\prod_s[0,1]\to[0,1]$是到第s个因子的自然映射，则有连续的交半格同态

$$f_0=p_s i: A\to[0,1],$$

使得

$$f_0(a)=p_s i(a)=i(a)_s\not\leqslant i(b)_s=f_0(b),$$

或者$f_0(a)>f_0(b)$。定义映射

$$g_0:[0,\ 1]\to[0,\ 1]$$

如下：$\forall t\in[0,1]$，

$$g_0(t)=\begin{cases}0 & \text{若 } 0\leqslant t\leqslant f_0(b),\\ \dfrac{t-f_0(b)}{f_0(a)-f_0(b)} & \text{若 } f_0(b)<t<f_0(a),\\ 1 & \text{若 } f_0(a)\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

容易验证，g_0是连续的交半格同态。所以，$f=g_0f_0$为所求的映射。

(ii)⇒(i) 这与定理(4.4.6)的(ii)⇒(iii)的证明是类似的。即，令

$S=\{f\mid f: A\to[0,1]$是连续的交半格同态$\}$。

定义映射θ如下：

$\theta: A\to\prod_s[0,1]$，$a\mapsto\{f(a)\}f\in s$，

则由(ii)可知θ是单的交半格同态。因为A是紧的，于是其象$\theta(A)$是$\prod_s[0,1]$的闭子交半格。所以，由定理(4.8.7)可知A是连续格。

§ 4.9 Lawson交半格

在上节中已经看到，连续格上存在一个紧Hausdorff拓扑使其成为紧Hausdorff拓扑交半格。定理(4.2.7)断言这样的拓扑是唯一的。本节将确定这个拓扑，并且将从拓扑交半格理论的观点论述连续格。

(4.9.1) **定理** 设A是连续格，则使A成为紧Hausdorff拓

扑交半格的唯一拓扑$\Lambda(A)$是A上的Scott拓扑$\Sigma(A)$与上区间拓扑$\phi(A^{op})$的并。即

$$\Lambda(A)=\Sigma(A)\vee\phi(A^{op}).$$

证明 设$\Lambda(A)$是使A成为紧Hausdorff拓扑交半格的A上唯一拓扑，于是由定理(4.2.4)可知$\Sigma(A)\subseteq\Lambda(A)$。此外，对于$\phi(A^{op})$的子基开集，形如$A-\uparrow(a)(a\in A)$，则根据命题(4.1.4)可知是$\Lambda$—开的。所以，

$$\Sigma(A)\vee\phi(A^{op})\subseteq\Lambda(A).$$

反之，从引理(4.8.6)的证明可知A上拓扑$\Lambda(A)$实际上是由嵌入映射

$$\downarrow(-):A\to KL(A)$$

决定的象上子空间拓扑。换言之，它是$KL(A)$上区间拓扑在$\downarrow(-)$下的原象。因此，只需证明$KL(A)$上区间拓扑的子基开集

$KL(A)-\downarrow(F)$，$KL(A)-\uparrow(F)$，其中$F\in KL(A)$，

在$\downarrow(-)$下的原象分别是在$\Sigma(A)$与$\Phi(A^{op})$中。

对于$a\in A$，$F\in KL(A)$，则

$\downarrow(a)\in(KL(A)-\downarrow(F))\Longleftrightarrow\downarrow(a)\notin F$

$\Longleftrightarrow a\notin F$(根据$F$是下集)。

于是，$\downarrow(-)^{-1}(KL(A)-\downarrow(F))=A-F\in\Sigma(A)$。

类似地，

$\downarrow(a)\in(KL(A)-\uparrow(F))\Longleftrightarrow F\nsupseteq\downarrow(a)$

$\Longleftrightarrow\bigvee F\nleqslant a$(根据$F$是下集)。

于是，$\downarrow(-)^{-1}(KL(A)-\uparrow(F))=A-\uparrow(\bigvee F)\in\Phi(A^{op})$。所以，$\Lambda(A)\subseteq\Sigma(A)\vee\Phi(A^{op})$。

综上所证，则知$\Lambda(A)=\Sigma(A)\vee\Phi(A^{op})$。

(4.9.2) **定义** 设A是连续格，则拓扑

$$\Lambda(A)=\Sigma(A)\vee\phi(A^{op})$$

称为A上Lawson拓扑。Lawson拓扑有一个基为

$$\{\Uparrow(a)\mid a\in A\}\cup\{A-\uparrow(a_1)\cup\cdots\cup\uparrow(a_n)\mid a_1,\cdots,a_n\in A\}.$$

(4.9.3) **定义** 设A为Hausdorff拓扑交半格.

(i) 对于$a\in A$,若a有一个由A的子交半格构成的邻域基,则称A在a处有小交半格;

(ii) 若A在其每一点处都有小交半格,则称A为Lawson交半格.

(4.9.4) **定理**(紧交半格基本定理) (i)若A是连续格,则关于Lawson拓扑,A是紧Lawson交半格;

(ii) 若A是紧Lawson交半格,则A是连续格,并且A上拓扑是Lawson拓扑.

证明 (i)根据定理(4.9.1),则$(A,\Lambda(A))$是紧Hausdorff拓扑交半格。考虑$\Lambda(A)$的基

$\{\Uparrow(a)\mid a\in A\}\cup\{A-\uparrow(a_1)\cup\cdots\cup\uparrow(a_n)\mid a_1,\cdots,a_n\in A\}$.

对于$a\in A$与a的基开邻域U,若$U=A-\uparrow(a_1)\cup\cdots\cup\uparrow(a_n)=(A-\uparrow(a_1))\cap\cdots\cap(A-\uparrow(a_n))$,则由$A-\uparrow(b)$ $(b\in A)$是A的子交半格可知U本身就是A的子交半格;若存在$b\in A$,使得$U=\Uparrow(b)$,则$b\ll a$,从而由插值性质可知存在$c\in A$,使得

$$b\ll c\ll a.$$

于是
$$a\in\Uparrow(c)\subseteq\uparrow(c)\subseteq\Uparrow(b).$$

但$\uparrow(c)$是A的子交半格,所以A在a处有小交半格.

综上所证,则知A是紧Lawson交半格.

(ii) 设A是紧Lawson交半格,则由定理(4.2.3)可知A是完备格。先证明下列结论:

对于$x, y\in A$,若$x\in int(\uparrow(y))$,则$y\ll x$. (1)

设$D\subseteq A$是定向集,并且$x\leqslant\bigvee D=d$。因为D作为A中的网收敛于d,于是$x\wedge D$收敛于$x\wedge d=x$。特别地,存在$d_1\in D$,满足

$$x\wedge d_1\in int(\uparrow(y))\subseteq\uparrow(y).$$

从而$y\leqslant x\wedge d_1\leqslant d_1$,这表明$y\ll x$,即(1)得证.

设$x, z\in A$,$x\not\leqslant z$,则$A-\downarrow(z)$是x的一个开邻域。由于A是正则的,并且在x处有小交半格,故存在x的邻域N,使得N是

A的子交半格，并且

$$x\in N\subseteq cl(N)\subseteq A-\downarrow(z). \qquad (2)$$

容易看到 $cl(N)$ 仍是交半格，从而是紧交半格。于是 $cl(N)$ 有最小元，设为w. 因此有$cl(N)\subseteq\uparrow(w)$. 由(2)式得出，

$$x\in int(cl(N))\subseteq int(\uparrow(w)).$$

再由(1)式，即知 $w\ll x$. 此外，从 $w\in cl(N)\subseteq A-\downarrow(z)$ 可知 $w\not\leq z$. 由此可知 $x=\bigvee\Downarrow(x)$. 所以，A 是连续格。最后，由定理(4.2.7)可知A上的拓扑必是Lawson拓扑.

(4.9.5) **定理** 设 $f:A\to B$ 是连续格之间的映射，则 f 是Lawson连续的交半格同态当且仅当 f 保任意交和保定向并.

证明 若 f 是Lawson连续的交半格同态，则由单调收敛定理可知 f 保定向并和保余定向交. 所以，f 也保任意交.

反之，若 f 保定向并和保任意交，则f是 Scott 连续的，并且有左伴随$g:B\to A$. 从而由伴随的定义可知，对于$b\in B$，有

$$f^{-1}(B-\uparrow(b))=A-\uparrow(g(b)).$$

于是 f 关于上区间拓扑也是连续的. 所以，f 是Lawson连续的交半格同态.

(4.9.6) **定义** (i)以连续格为对象，以保任意交和保定向并的映射为态射构成一个范畴，记作***ContLat***.

(ii) 以紧Lawson交半格为对象，以Lawson连续的交半格同态为态射构成一个范畴，记作***KLawSLat***.

(4.9.7) **定理** 范畴***ContLat***与范畴***KLawSLat***等价.

证明 这是定理(4.9.4)和(4.9.5)的推论.

§4.10 局部紧Locale

本节从 Locale 理论的观点论述连续格，由此明确了分配的连续格与局部紧Locale 之间的关系.

(4.10.1) **命题** 设X是拓扑空间.

（i） 设U，$V\in\Omega(X)$，若存在紧集K满足$U\subseteq K\subseteq V$，则在$\Omega(X)$中，$U\ll V$；

（ii） 若X是局部紧空间，则$\Omega(X)$是连续格。

证明 (i)设$\{U_r|r\in\Gamma\}$是$\Omega(X)$的定向子集族，并且$V\subseteq\bigcup\{U_r|r\in\Gamma\}$，则$\{U_r|r\in\Gamma\}$是$K$的开覆盖。于是存在$r\in\Gamma$满足$U\subseteq K\subseteq U_r$，即$U\ll V$。

(ii) 设$U\in\Omega(X)$，$x\in U$，则由局部紧性可知存在x的紧邻域K，使得

$$x\in int(K)\subseteq K\subseteq U.$$

根据(i)的结论，则有$int(K)\ll U$。从而

$$U=\bigcup\{V|V\in\Omega(X),\ V\ll U\}.$$

所以，$\Omega(X)$是连续格。

(4.10.2) 注 命题（4.10.1）的结论(i),(ii)的逆一般是不成立。然而，本节后面将会看到，对拓扑空间加以适当的限制，则命题（4.10.1）的逆也成立。例如，对于Sober空间X，则X是局部紧空间当且仅当$\Omega(X)$是连续格。这引出下列定义。

(4.10.3) **定义** 设A是locale。若A是连续格，则称locale A是局部紧的。

根据命题(4.8.3)，则完备格A是局部紧locale当且仅当A是分配的连续格。

注意 对于locale A，可将ptA视为A的全体完备素滤子之集，即$pt^{\triangle}A$。

(4.10.4) **引理** 设A是locale，$a\in A$。若F关于$a\notin F$为极大的Scott开滤子，则F是完备素滤子。

证明 已经知道，滤子$F\subseteq A$是完备素滤子当且仅当F是Scott开素滤子。为此只要再证明F是素滤子。显然$o\notin F$。假定F不是素滤子。即，存在$b,c\in A$，使得$b\vee c\in F$，并且b，$c\notin F$。令

$$G=\{d\in A\mid d\vee c\in F\},$$

容易验证，G 是滤子，$G=(c\vee(-))^{-1}(F)$。因为映射

$$c\vee(-):A\to A$$

保任意并，从而它是Scott连续的。于是G是Scott 开的。此外，因为$F\subsetneq G$，故由F的极大性可知$a\in G$，即$a\vee c\in F$。令

$$H=\{e\in A\,|\,a\vee e\in F\}.$$

类似地，可以证明H是 Scott 开滤子，$F\subseteq H$与 $a\notin H$。但是由F的极大性，则有 $F=H$，于是$c\in H=F$，这与假设矛盾。所以，F是素滤子。

(4.10.5) **定理** 局部紧locale是空间式的。

证明 设A是局部紧 locale，又设 a，$b\in A$，$a\not\leqslant b$。因为A是连续格，从而由定理 (4.5.12) 可知存在 Scott 开滤子 F使得 $a\in F$，$b\notin F$，于是由Zorn 引理可知，F 可以扩大成满足 $b\notin G$ 的极大 Scott 开滤子G。又由引理(4.10.4)可知，G是完备素滤子。但是 $a\in G$，$b\notin G$，所以A是空间式的。

(4.10.6) **定理** 设 A 是分配的 完备格，则 A是完全分配格当且仅当A和 A^{op} 都是连续格。

证明 必要性是显然的。

充分性。设A和A^{op} 都是分配的连续格，则由推论(4.8.3)可知A^{op}是 locale，从而是局部紧的。于是A^{op}是空间式locale，换言之，A的每个元都可表为余素元的并。对于$a\in A$，有

$$\begin{aligned}a&=\bigvee(\Downarrow(a)\cap M(A))\\&=\bigvee\{c\in A\,|\,c\ll a,\ c\in M(A)\}.\end{aligned}$$

令

$$\beta=\Downarrow(a)\cap M(A).$$

若$K\subseteq A$，并且满足 $a\leqslant\bigvee K$，用S记由K中有限子集的并构成的定向集，则有$\bigvee S=\bigvee K\geqslant a$。对于 $c\in\beta$，因为 $c\ll a$，于是存在 $s\in S$ 使得 $c\leqslant s$ 。又c是余素元，s是K的元的有限并，因此存在 $b\in K$，使得$c\leqslant b$。这表明β是a的极小集。所以，A是 完 全分配格。

(4.10.7) **命题** 设A是完全分配格，则Lawson拓扑$\Lambda(A)$与$\Lambda(A^{op})$重合，并且等于A上区间拓扑.

证明 由于A和A^{op}都是连续格，从而$(A,\Lambda(A))$和$(A,\Lambda(A^{op}))$都是紧Hausdorff拓扑交半格. 所以，由定理(4.2.7)可知这两个拓扑都与A上区间拓扑重合.

(4.10.8) **定理**(Scott开滤子定理) 设A是局部紧locale，X是A的完备素滤子之集，则X作为$pt^{\nabla}(A)$的子集是紧的当且仅当$\bigcap X$是Scott开滤子.

证明，设$X\subseteq pt^{\nabla}(A)$是紧的. 若$S\subseteq A$是定向集，并且满足$\bigvee S\in\bigcap X$，则$\forall F\in X$，$\bigvee S\in$ F. 由于F是Scott开的，故存在$s\in S$，使得$s\in F$，即$F\in\Phi^{\nabla}(s)$，其中$\Phi^{\nabla}(a)=\{F\in pt^{\nabla}(A)\mid a\in F\}$，$a\in A$. 于是定向集族$\{\Phi^{\nabla}(s)\mid s\in S\}$是$X$的开覆盖. 由$X$的紧性可知存在$s\in S$，使得$X\subseteq\Phi^{\nabla}(s)$，即$\forall F\in X, F\in\Phi^{\nabla}(s)$，从而$s\in(\bigcap X)\cap S$. 所以，$\bigcap X$是Scott开集. 另外，$\bigcap X$明显是滤子.

反之，设$\bigcap X$是Scott开滤子. 若对于$S\subseteq A$，

$$X\subseteq\bigcup\{\Phi^{\nabla}(s)\mid s\in S\}=\Phi^{\nabla}(\bigvee S),$$

则有$\bigvee S\in\bigcap X$. 因为$\bigcap X$是Scott开的，故存在有限子集$K\subseteq S$，使得$\bigvee K\in\bigcap X$. 换言之，$X\subseteq\Phi^{\nabla}(\bigvee K)$. 于是$\{\Phi^{\nabla}(s)\mid s\in K\}$是有限子覆盖. 所以，$X$是紧的.

(4.10.9) **命题** 设A是局部紧locale，则

(i) 对于a，$b\in A$，$a\ll b$当且仅当存在紧集$X\subseteq pt^{\nabla}(A)$，满足$\Phi^{\nabla}(a)\subseteq X\subseteq\Phi^{\nabla}(b)$；

(ii) $pt^{\nabla}(A)$是局部紧空间.

证明 (i)设$a\ll b$，则由插值定理可知，存在A中元的序列$\{c_0, c_1, \cdots\}$使得对一切整数$n\geqslant 0$，有

$$a\ll c_{n+1}\ll c_n\ll b,$$

令

$$F=\bigcup_{n=0}^{\infty}\Uparrow(c_n),$$

则容易验证F是 Scott 开滤子，并且

$$b\in F\subseteq\uparrow(a).$$

令X是包含F的所有A的完备素滤子之集．显然，

$$F\subseteq\bigcap X.$$

另一方面，若$x\notin F$，则由引理(4.10.4)可知，存在完备素滤子$G\subseteq F$，并且$x\notin G$，于是$F=\bigcap X$．因为F是Scott 开滤子，故由定理(4.10.8)可知，$X\subseteq pt^{\nabla}(A)$是紧集．对于完备素滤子$G\in pt^{\nabla}(A)$，则

$$G\in\Phi^{\nabla}(a)\Rightarrow a\in G\Rightarrow\uparrow(a)\subseteq G$$
$$\Rightarrow F\subseteq G\Rightarrow G\in X,$$

即$\Phi^{\nabla}(a)\subseteq X$．另外，

$$G\in X\Rightarrow F\subseteq G\Rightarrow b\in G$$
$$\Rightarrow G\in\Phi^{\nabla}(b).$$

即$X\subseteq\Phi^{\nabla}(b)$．

反之，设存在紧集$X\subseteq pt^{\nabla}(A)$，满足$\Phi^{\nabla}(a)\subseteq X\subseteq\Phi^{\nabla}(b)$，则由命题(4.10.1)可知在$\Omega(pt^{\nabla}(A))$中，有$\Phi^{\nabla}(a)\ll\Phi^{\nabla}(b)$．根据定理(4.10.5)，则$A$是空间式的，于是有格同构

$$\Phi^{\nabla}:A\to\Omega(pt^{\nabla}A),\quad a\mapsto\Phi^{\nabla}(a).$$

从而在A中，$a\ll b$．

(ii) 对于$\Phi^{\nabla}(a)\in\Omega(pt^{\nabla}A)$，其中$a\in A$，则

$$\begin{aligned}\Phi^{\nabla}(a)&=\Phi^{\nabla}(\bigvee\Downarrow(a))\qquad(\text{根据}A\text{是连续格})\\&=\bigcup\{\Phi^{\nabla}(b)\mid b\ll a\}\quad(\text{根据}\Phi^{\nabla}\text{保任意并})\\&=\bigcup\{\Phi^{\nabla}(b)\mid b\in A,\ \text{存在紧集}X,\ \text{使得}\\&\qquad\Phi^{\nabla}(b)\subseteq X\subseteq\Phi^{\nabla}(a)\}.\end{aligned}$$

所以，$pt^{\nabla}(A)$是局部紧的．

(4.10.10) **定理** 设X是 Sober 空间，则X是局部紧空间当且仅当$\Omega(X)$是连续格．

证明 必要性在命题(4.10.1)中已经证明。

充分性。设$\Omega(X)$是连续格，则$\Omega(X)$是局部紧 locale。根据命题(4.10.9)(ii)，则$pt^{\nabla}\Omega(X)$是局部紧空间。但X是Soder空间，于是由定理(3.6.4)(i)可知

$$X \cong pt^{\nabla}(\Omega(X)).$$

所以，X是局部紧的。

§4.11 入射T_0空间

本节从一般拓扑学观点研究连续格，揭示了连续格与T_0空间的一个重要和有趣的联系。

(4.11.1) 定义 令$S=\{0, 1\}$，若S带有拓扑

$$\Omega(S)=\{\phi, \{1\}, \{0, 1\}\},$$

则称S是 Sierpinski 空间。

(4.11.2) 引理 任意T_0空间都可以嵌入到Sierpinski空间的幂中。

证明 设X是任意T_0拓扑空间，则由S上拓扑的定义可知，每个连续映射$f: X\to S$由$f^{-1}(\{1\})$唯一地确定，并且$f^{-1}(\{1\})$可以取X的任意开集。考虑标准映射

$$\theta: X \to \prod_{\Omega(X)} S,$$

其中对于$x\in X$，$U\in\Omega(X)$，$\theta(x)_U = i_U(X)$，并且$i_U(X)$定义如下，$\forall x\in X$，$U\in\Omega(X)$，

$$i_U(X)=\begin{cases}1 & \text{若 } x\in U,\\ 0 & \text{若 } x\notin U.\end{cases}$$

容易看出，θ是单射当且仅当X是T_0空间。对于$U\in\Omega(X)$，用

$$p_U: \prod_{\Omega(X)} S \to S$$

记到第U个因子上的自然投影映射，则$\forall U\in\Omega(X)$，

$$(p_U\theta)^{-1}(\{1\}) = U,$$

即$p_U\theta$是连续的。所以，θ是连续的。

下面证明 $\theta(X)$ 上拓扑是关于$\prod_{\Omega(X)}S$ 的子空间拓扑．这只需要证明frame同态

$$\theta^{-1}:\Omega(\prod_{\Omega(X)}S)\to\Omega(X)$$

是满射．对于$U\in\Omega(X)$，则

$$U=(p_U\theta)^{-1}(\{1\})=\theta^{-1}(p_U^{-1}(\{1\}))\text{.}$$

但是$p_U^{-1}(\{1\})$是$\prod_{\Omega(X)}S$的开集，所以 θ^{-1} 是满射．

综上所证，则知X同胚于$\prod_{\Omega(X)}S$的子空间．

(4.11.3) **定义** 设Z是T_0拓扑空间．若对于任意T_0拓扑空间X，Y，$X\subseteq Y$，以及任意连续映射 $f:X\to Z$，都存在 f 到Y 上的连续扩张$\bar{f}:Y\to Z$，则称 T_0空间Z是入射的．

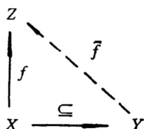


图 (4.11.1)

类似地，可以定义Locale范畴中入射对象，即入射locale．

(4.11.4) **例** Sierpinski空间S是入射T_0空间．

证明 显然，S是T_0空间．设X，Y是任意T_0空间，$X\subseteq Y$，$f:X\to S$是任意连续映射，$i:X\to Y$为包含映射．因为$f^{-1}(\{1\})\in\Omega(X)$，从而存在 Y 的开集U，使得 $f^{-1}(\{1\})=U\cap X$．于是开集U 确定了一个连续映射 $\bar{f}:Y\to S$，$\bar{f}$ 即是f的扩张．所以，S是入射 T_0 空间．

(4.11.5) **引理** (i)入射 T_0 空间的收缩核是入射 T_0 空间；

(ii) 入射T_0 空间的乘积是入射T_0空间．

证明 (i)设Z是入射T_0空间，$Z_0\subseteq Z$是Z的收缩核．即，存在连续映射 $r:Z\to Z$．满足

$$r|Z_0=id_{Z_0}\text{或}ri=id_{Z_0},$$

其中id_{Z_0} 是Z_0上的恒同映射，$i:Z_0\to Z$为包含映射．对于任意T_0空间 $X,Y,X\subseteq Y$，以及连续映射 $f:X\to Z_0$，则有连续映射

$$if: X \to Z.$$

但Z是入射T_0空间，故存在连续映射$f': Y \to Z$满足$f'j = if$，其中$j: X \to Y$为包含映射．令

$$\bar{f} = rf': Y \to Z_0,$$

则$\bar{f}$连续，并且$\bar{f}j = (rf')j = r(f'j) = (ri)f = f$．所以，$Z_0$是入射$T_0$空间．

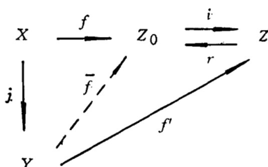


图 (4.11.2)

(ii) 设$\{Z_r | r \in \Gamma\}$是入射T_0空间族．令$Z = \prod\{Z_r | r \in \Gamma\}$，对于$T_0$空间$X$，$Y$，$X \subseteq Y$，以及连续映射$f: X \to Z$，则$\forall r \in \Gamma$，有连续映射

$$p_r f: X \to Z_r,$$

其中$p_r: Z \to Z_r$是自然投影映射．由于每个Z_r是入射T_0空间，从而$\forall r \in \Gamma$，存在连续映射

$$g_r: Y \to Z_r,$$

使得$g_r i = p_r f$，其中$i: X \to Y$为包含映射．根据乘积空间的性质，则存在连续映射$\bar{f}: Y \to Z$，使得$\forall r \in \Gamma$，$p_r \bar{f} = g_r$．于是，$\forall x \in X$，$\forall r \in \Gamma$，有

$$p_r \bar{f} i(x) = g_r i(x)$$
$$= p_r f(x),$$

即$\bar{f} i = f$．所以，Z是入射T_0空间．

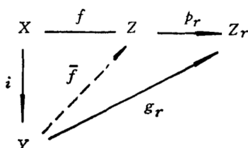


图 (4.11.3)

(4.11.6) **定理** T_0 空间 X 是入射的当且仅当X是(或同胚于) Sierpinski空间 S 的幂的收缩核.

证明 若X是 S 的幂的收缩核，则由 例 (4.11.4) 和引 理 (4.11.5) 可知X是入射T_0 空间.

设X是入射空间，则由引理(4.11.2) 可知有嵌入映射

$$f: X \to \prod_{\Omega(X)} S.$$

不妨将 f 视为包含映射，于是存在连续映射

$$g: \prod_{\Omega(X)} \to X,$$

使得$gf = id_X$。所以，X是$\prod_{\Omega(X)} S$的收缩核.

若将 $S = \{0, 1\}$ 视为平凡偏序集，容易看出其拓扑 $\Omega(S) = \{\phi, \{1\}, S\}$是由此序诱导的Scott拓扑. 不仅如此，还有:

(4.11.7) **定理** 对于任意集X，则 $\prod_X S$上乘积拓扑是由标准偏序诱导的Scott拓扑.

证明 用 $P(X)$ 表示 X 的幂集格，则有标准格同格$P(X) \to \prod_X S$，它将X的每个子集X^*对应于X^* 的特征函数. 现在$P(X)$是连续格(事实上是完全分配格和代数格)，故其有限元恰是X的有限子集.因此,若$X^* \in P(X)$是有限集,则$\Uparrow(X^*) = \uparrow(X^*)$. 现设 $X^* \in P(X)$是无限集. 若存在$Y \in P(X)$，使得$Y \ll X^*$，记

$$D_Y = \{Y^* | Y^* \subseteq Y, \ Y^* \text{ 是有限集}\},$$

则 D_Y 是$P(X)$中定向集，并且$Y = \bigcup D_Y$. 由于X^*是无限集，从而 D_Y 的任意元都不能包含X^*. 这与$Y \ll X^*$矛盾. 于是$P(X)$上

的Scott拓扑有基

$$\{\uparrow(X^*)\mid X^*\subseteq X,\ X^*\text{是有限集}\}.$$

这个基在标准同构映射$P(X)\to\prod_X S$下被映成集族

$$\{\uparrow(f)\mid f\in\prod_X S,\ f=\{f_x\}_{x\in X},\ \text{有限个}f_x=1\},$$

这恰好是$\prod_X S$上乘积拓扑的基。所以，$\prod_X S$上乘积拓扑与Scott拓扑重合。

(4.11.8) **定理** (i)若X是入射T_0空间，则X是连续格，并且$\Omega(X)=\Sigma(X)$；

(ii) 若A是连续格，则$(A,\ \Sigma(A))$是入射T_0空间。

证明 (i)根据定理(4.11.6)，则X同胚于$\prod_{\Omega(X)}S$的收缩核。因为$\prod_{\Omega(X)}S$是连续格，从而由引理(4.6.1)可知X是连续偏序集，并且由定理(4.11.7)可知$\Omega(X)$即是X上Scott拓扑，可以证明X还是并半格。所以，X是连续格。

(ii) 设A是连续格。根据定理(4.6.2)，则A是代数偏序集的收缩核。不妨设A是代数偏序集，于是存在偏序集B，使得$A=Idl(B)$。因为包含映射$i:Idl(B)\to P(B)$保定向并，从而是Scott连续的。此外，对于$B^*\in P(B)$，令$g(B^*)$是由B^*生成的理想，则映射$g:P(B)\to Idl(B)$是i的左伴随，并且$gi=id$。于是$A=Idl(B)$是$P(B)$的收缩核。根据引理(4.11.5)和定理(4.11.7)，则$P(B)\simeq\prod_B S$是入射的。所以，A也是入射的。

(4.11.9) **命题** 集X生成的自由frame同构于$P(X)\simeq\prod_X S$上Scott拓扑。

证明 以LX表示X生成的自由frame，不难验证，LX是并半格FX中的上集之族，此处

$$FX=\{X^*\mid X^*\subseteq X,\ X^*\text{是有限集}\},$$

对于$X^*\in FX$，伴随有Scott基开集$\Uparrow(X^*)=\uparrow(X^*)$。定义映射$h:LX\to\Sigma(P(X))$如下：$\forall U\in LX$，

$$h(U)=\uparrow_{P(X)}(U).$$

注意：因为U是FX中的上集，于是一般有$h(U)\supseteq U$。再定义映

射$g:\sum(P(X))\to LX$为：$\forall V\in\sum(P(X))$，

$$g(V)=V\cap FX\ 。$$

容易验证h,g是互逆的保序双射，证毕。

(4.11.10) 定理 设A是locale，则以下条件等价：

(i) A是入射的(即A是locale的入射对象)；

(ii) A同构于某个自由frame LX在Loc中的收缩核；

(iii) A同构于某个连续格的Scott拓扑；

(iv) A是空间式的，并且$pt^{\triangledown}(A)$是入射T_0空间。

证明 (1)⇒(ii)因为由A生成的自由frame是$Idl(A)$，并且有标准嵌入映射$A\to Idl(A)$。所以，由入射性即知A是$Idl(A)$的收缩核。

(ii)⇒(i)仿照引理(4.11.5)(i)的证明。

(ii)⇒(iv)由命题(4.11.9)即证。

(iii)⇔(iv)由定理(4.11.8)即证。

(iv)⇒(ii)因为$pt^{\triangledown}(A)$是入射T_0空间，从而它是某个$\prod_X S$的收缩核。但是由命题(4.11.9)可知$\Omega(\prod_X S)$是自由frame LX。所以，$A\cong\Omega(pt^{\triangledown}A)$同构于$\Omega(\prod_X S)\cong LX$的收缩核。

符 号 索 引

1. 范畴符号索引

ContP	是范畴，其对象为连续偏序集，对于连续偏序集之间的映射f：$A\to B$，f是**ContP**中的态射当且仅当f保定向并且保关系≪。	(4.6.6)
CoFCoT	是范畴，其对象为余frame A与其上一个余拓扑η的序对(A,η)，并且对于$f\in Hom_{CoFrm}(A,B)$，$f\in Hom_{CoFcoT}((A,\eta_1),(B,\eta_2))$当且仅当$f_*(\eta_2)=\eta_1$。	(3.11.5)
$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$	以范畴C中的T一代数为对象，以T一代数同态为态射的范畴	(1.7.3)
CoFrm$_*$	是范畴，其对象为余frame，余frame之间的映射f：$A\to B$是**CoFrm$_*$**中的态射当且仅当f保任意并，f_*保有限并。	(3.11.1)
DLat	以分配格为对象，以格同态为态射的范畴。	(3.4.11)
Frm	以满足无限分配律的完备格(称之为frame)为对象，以保任意并，有限交的映射(称之为frame同态)为态射的范畴。	(3.1.1)
FrmPair	以frame偶为对象，以frame偶同态为态射的范畴。	(3.11.3)
Grp	以群为对象，以群同态为态射的范畴。	(1.1.3)
KHausSp	以紧Hausdorff拓扑空间为对象，以连续映射为态射的范畴。	(1.7.7)
KHausTopLat	以紧Hausdorff拓扑格为对象，以连续的格同态为态射的范畴。	(4.2.8)
KLawSLat	以紧Lawson交半格为对象，以Lawson连续的交半格同态为态射的范畴.	(4.9.6)
Loc	以Locale为对象，以Locale连续映射为态射的范畴。	(3.1.1)
O	空范畴。	(1.1.3)
Set	以集为对象，以映射为态射的范畴。	(1.1.3)
Sp	以拓扑空间为对象，以连续映射为态射的范畴。	(1.1.3)

Sob	以Sober空间为对象，以连续映射为态射的范畴。	(3.6.7)
SLoc	以空间式Locale为对象，以Locale连续映射为态射的范畴。	(3.6.7)
Stone	以Stone空间为对象，以凝聚连续映射为态射的范畴。	(3.8.11)

2. 标准符号

ϕ	空集
$\in(\notin)$	属于(不属于)
$=(\neq)$	等于(不等于)
$\subseteq$	包含于
$\forall$	对于每一个
$\exists$	存在
$\Longrightarrow$	蕴涵
$\Longleftrightarrow$	等价，当且仅当
$\{x\mid P(x)\}$	具有性质P的对象x组成的集
$\cup(\bigcup)$	并(集族的并)
$\cap(\bigcap)$	交(集族的交)
$-$	差、减法
Π	直积
$\amalg$	不交并
$X/\sim$	集X关于等价关系$\sim$的商集
$f: X\to Y$	从X到Y的映射
$a\mapsto b$	将a映为b
gf	映射f与映射g的合成(态射f与态射g的合成)
$f\mid A$	映射f在A上的限制
f^{-1}	映射f的逆映射
$\cong$	同构

3. 其它符号索引

$ob(\mathbf{C})$	范畴$\mathbf{C}$的对象类	(1.1.1)
$Hom_{\mathbf{C}}(A,B)$	在范畴$\mathbf{C}$中，以A为定义域，以B为值域的态射的集	(1.1.1)
$f: A \to B$	以A为定义域，以B为值域的态射f	(1.1.1)
id_A	A上的恒同态射	(1.1.1)
$\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$	范畴$\mathbf{C}_1$与范畴$\mathbf{C}_2$的乘积范畴	(1.1.6)
$\mathbf{C}^{op}$	范畴C的对偶范畴	(1.1.7)
$\varinjlim F$	F的余极限	(1.4.4)
$\varprojlim F$	F的极限	(1.4.4)
$\coprod\{F \mid j \in J\}$	范畴中对象族$\{F \mid j \in J\}$的余积对象	(1.4.7)
$\prod\{F \mid j \in J\}$	范畴中对象族$\{F \mid j \in J\}$的乘积对象	(1.4.7)
$F \dashv G$	F是G的左伴随，G是F的右伴随	(1.5.1)
$\leqslant$	偏序关系	(2.1.1)
$\bigvee S$(或$\sup S$)	S的并，S的上确界	(2.1.4)
$\bigwedge S$(或$\inf S$)	S的交，S的下确界	(2.1.4)
$a \vee b$	a与b的并	(2.1.5)
$a \wedge b$	a与b的交	(2.1.5)
a'	a的补元	(2.1.5)
$\uparrow(a)$	由a生成的主滤子	(2.5.4)
$\downarrow(a)$	由a生成的主理想	(2.5.4)
$\uparrow(S)$	S的上集	(2.5.4)
$\downarrow(S)$	S的下集	(2.5.4)
$Idl(P)$	偏序集P的全体理想之集	(2.5.5)
$Fil(P)$	偏序集P的全体滤子之集	(2.5.5)
$a \to b$	a与b的Heyting implication	(2.9.1)
$\neg a$	a的伪补元，a的否定	(2.9.5)
$*$	完备格之间的映射	

	$f: A \to B$的右伴随	(2.10.10)
f_*	完备格之间的映射	
	$f_!$: $A \to B$的左伴随	(2.10.10)
$a \lhd b$		(2.10.12)
$\overset{\downarrow}{\triangledown}(a)$		(2.10.12)
$\Omega(X)$	拓扑空间X的开集格	(3.1.2)
ptL	Locale L的全体点之集	(3.1.3)
$pt^\circ L$	Locale L的全体素元之集	(3.1.5)
$pt^\nabla L$	Locale L的全体完备素滤子之集	(3.1.5)
$K(L)$	完备格L的全体有限元之集	(3.4.1)
$a \preccurlyeq b$	a well inside b	(3.5.1)
$\Gamma(X, \leqslant)$ (或$\Gamma(X)$)	偏序集X上的Alexandrov拓扑	(3.7.2)
$\Phi(X, \leqslant)$ (或$\Phi(X)$)	偏序集X上的上区间拓扑	(3.7.2)
$\Sigma(X, \leqslant)$ (或$\Sigma(X)$)	偏序集X上的Scott拓扑	(3.7.2)
$Spec^\circ D$	分配格D的谱空间	(3.8.4)
$C\text{-}Idl(A)$	交半格A的全体C-理想之集	(3.9.1)
$X \wedge Y$	$\{x \wedge y \mid x \in X,\ y \in Y\}$	(3.9.2)
$(X : Y)$	$\{z \in A \mid z \wedge Y \subseteq X\}$	(3.9.2)
$\limsup \varphi$	滤子φ的上极限	(4.3.2)
$\liminf \varphi$	滤子φ的下极限	(4.3.2)
$\widehat{A}$	连续偏序集A的Lawson对偶	(4.7.5)
$a \ll b$	a way below b	(4.5.3)
$\twoheaddownarrow(a)$	$\{b \in A \mid b \ll a\}$	(4.5.4)
$\twoheaduparrow(a)$	$\{b \in A \mid a \ll b\}$	(4.5.4)
$KL(A)$	连续格A的全体Scott闭集之族	(4.8.5)
$\Lambda(A)$	连续格A上Lawson拓扑	(4.9.2)

名 词 索 引

参 考 文 献

[1] 白仲林, Connective Locales, 科学通报, 2(1990), 155.

[2] R.Balbes, P.Dwinger, Distributive Lattices, University of Missouri Press, 1974.

[3] B.Banaschewski, R.E.Hoffmann (editors), Continuous Lattices, Lecture Notes in Math, 871,Springer-Verlag, Berlin/New York/Heidelberg,1981.

[4] M.Barr, C.Wells, Toposes, Triples, Theories,Springer-Verlag, New York/Berlin/Heidelberg, 1985.

[5] M.Barr,C.Wells, Category theory for computing science,Prentice-Hall, 1990.

[6] J.Barwise(editor), Handbook of Mathematical Logic, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol.90, North-Holland, Amsterdam/New York/Oxford, 1977.

[7] J.L.Bell, Toposes and Local Set Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[8] G.Birkhoff, Lattice Theory(3rd ed), American Mathematical Society, Colloouium Publications. Vol.25, Providence, R.I.1979.

[9] F.Borceux (editor), Categorical Algebra and its Applications, Lecture Notes in Nath . Vol.1348, Springer-Verlag, Berlin/New York/Heidelberg, 1989.

[10] J.H.Carruth, I.A.Hidebrandt and R.J.Koch, The Theory of Topological Semigroups (I), Marcer Dekker, Inc., New York and Basel, 1983.

[11] J.H.Carruth,I.A.Hidebrandt and R.J.Koch,The Theory

of Topological Semigroups (II), Marcer Dekker, Inc., New York and Basel, 1986.

[12] 陈贻源，模糊数学，华中工学院出版社，武汉，1984.

[13] 陈意云，计算机科学中的范畴论，中国科技大学出版社，合肥，1993.

[14] 陈仪香，完全分配格上的仿紧性，模糊系统与数学，1992年增刊，204.

[15] P.Crawley, R.P.Dilworth, Algebraic Theory of Lattices, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.

[16] 崔宏斌，Locale范畴的一些相关范畴，首都师范大学学报，2(1993), 15—17.

[17] 崔宏斌，樊磊，郑崇友，L^X上的一种诱导映射及其伴随结构(将发表).

[18] 崔宏斌，郑崇友，保层Fuzzy序同态的结构和Fuzzy同胚的另一定义，科学通报，13(1987)，964-966.

[19] Davies, H. A. Preistly, Introduction to Lattices and Orders, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[20] J.Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966

[21] C.Ehresmann, Gattungen von lokalen Strukluren, Jber. Deutsch, Math, -Verein, 60(1957), 59-77.

[22] R. Engelking, General Topology, PWN, Warzawa, 1977.

[23] 樊磊，连续偏序集的极小集式刻划，中国系统工程学会模糊数学与模糊系统委员会第五届年会论文选集，西南交通大学出版社，成都，1990，23-24.

[24] 樊磊，拟极小集理论及其对连续偏序集的应用，北京师范学院学报(自然科学版)，2(1992)，12-17.

[25] 樊磊，崔宏斌，郑崇友，分子格的直积分解与广义序同态的构造，科学通报，21(1987)，1611-1614.

[26] 樊太和，分子格范畴中的积运算，科学通报，31(1986)，244-

247.

[27] 樊太和，拓扑分子格范畴，四川大学博士论文，1990.

[28] 冯煤生，王德谋，伪拟度量与Fuzzy P.Q度量，模糊系统与数学，1992年增刊，67—69.

[29] M. P. Fourman, D.S. Scott, Sheaves and Logic, in Applications of Sheaves, Lacture Notes in Math. Vol. 753, Springer-Verlag, Berlin/New York/Heidelberg 1979, 302-401.

[30] M.P.Fourman, C. J. Mulvey and D.S.Scott (editors), Applications of Sheaves, Lecture Notes in Math, Vol. 753, Springer-Verlag,Berlin/New York/Heidelberg 1979.

[31] P.Freyd, Abelian Categories,Harper & Row,New York, 1964.

[32] G.Gierz et al, A Compendium of Continuous Lattices, Springer-Verlag, Berlin/New York,1980.

[33] J.A.Goguen, L-Fuzzy Sets, J.Math, Anal Appl., vol. 18(1967), 145-174.

[34] J. Golan, H.Simmons, Derivatives, Nuclei and Dimensions of the Frame of Torsion Theories, Longman Scientific and Technieal, London, 1988.

[35] R.Goldblatt, Topoi, The Categorical Analysis of Logic (2nd ed), Studies in Logic and the Foundations of Mathematics Vol. 104, North-Holland, Amsterdam/New York/Oxford, 1984.

[36] G.Gratzer, General Lattice Theory, Birkhauser, Basel, 1978.

[37] 关肇直，拓扑空间概论，科学出版社，北京，1958.

[38] W.Hatcher, The Logical Foundations of Mathematics, Pergamon press, Oxford/Wew York/Toronto, 1982.

[39] 何伯镛，拓扑均衡支撑分子格，数学学报，5(1992), 642—651.

[40] 何明,拓扑空间的Frame映射与点分离性公理,科学通报,5(1987), 326-327.

[41] 何伟，樊磊，格上拓扑中拟网收敛与拟理想收敛的等价性，北京师范学院学报(自然科学版)，3(1987)，14—18.

[42] H.Herrlich, G.E.Strecker, Category Theory, Allyn and Bacon, Boston,1974.

[43] R.E.Hoffmann, Continuous posets, prime spectra of completely distributive complete lattices and Hausdorff compactifications, Continuous Lattices, Lecture Notes in Math. Vol.871, Springer-Verlag, Berlin/New York/ Heidelberg 1981, 159-208.

[44] R.-E. Hoffmann (editor), Continuous Lattices and Relate Topics, University of Bremen, Bonn, 1982.

[45] R.-E.Hoffmann, K.H.Hofmann (editors), Continuous Lattice and its Applications, Marcel Dekker, Inc.,New York and Basel, 1985.

[46] K. H. Hofmann, J.D.Lawson, The spectral theory of distributive continuous lattices, Trans.Amer.Math. Soc.,Vol.246(1978), 285-310.

[47] J.R.Isbell, Atomless part of spaces, Math.Scand., Vol. 31(1972), 5-32.

[48] I.M.James (editor), Aspects of Topology, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[49] 金晨辉，分子格和连续偏序集中的完全并既约元，模糊系统与数学，1992年增刊，356—358.

[50] 金晨辉，郑崇友，在分子格范畴中乘积的既约性，模糊数学与系统，1(1987)，45—50.

[51] 金晨辉，郑崇友，分子格的既约度、分解度与分子格乘积的既约性，模糊数学与系统，2(1990)，24—29.

[52] 金长泽，不分明拓扑学的某些发展概况，东北师范大学学报(自然科学版),2(1981)，53—66.

[53] P.T.Johnstone, Topos Theory, Academic Press, New York, 1977.

[54] P.T.Johnstone, Stone Spaces, Cambridge University

Press, Cambridge, 1982.

[55] P.T.Johnstone, The point of pointless topology, Bull. Amer.Math.Soc., Vol.8(1983), 41—53.

[56] P. T. Johnstone, Notes on Logic and Set Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[57] P.T.Johnstone, How general is a generalized space? Aspect s of Topology, Cambridge University Press, Cambridge, 1985, 77—111.

[58] P.T.Johnstone, S.H.Sun, Weak product and Hausdorff locale, Lecture Notes in Math., Vol, 1348, Springer-Verlag, Berlin/New York/Heidelberg, 1988, 173—195.

[59] A. Joyal, M. Tierney, An Extension of the Galois Theory of Grothendieck, Amer.Math.Soc.Memoirs, No. 309(Amer.Math.Soc, Prordence, R, I, 1984).

[60] J.L.Kelly, General Topology, D.Van Nostrand Co.Inc., Princeton, N.J.1955.

[61] S. Kopperman, Foundations of Boolean Algebras, Handbook of Boolean Algebra Vol.1, Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), New York/Oxford, 1989.

[62] J.D.Lawson, The duality of continuous posets, Houston J.Math., 5(1979), 357—386.

[63] J.D.Lawson, M.Mislove, Open Problems in domain theory and topology, Problems in Topology, Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), Amsterdam/ New york/Oxford, 1990, 349—372.

[64] 李洪兴，因素空间论，北京师范大学博士论文，1992.

[65] 李雷，φ-辅助序与φ-连续格的刻划，科学通报，17(1991), 1355.

[66] 李中夫，不分明拓扑空间的紧性，科学通报，6(1984)，321—323.

[67] 梁基华，关于不分明度量空间的几个问题，数学年刊，1(1984),

59—67.

[68] 梁基华，Fuzzy度量的点式刻划及其应用，数学学报，9(1987)，733—741.

[69] 梁基华，完全分配格上的一致结构，科学通报，14(1989)，1049—1051.

[70] W. J. Liu, Fuzzy proximity spaces redefined, Fuzzy Sets and Systems, 15(1985), 241—248.

[71] 刘晓石，格上点式拓扑的基数函数，数学研究与评论，3(1986)，5—11.

[72] 刘晓石，完全分配格上拓扑的内部运算与正则、正规性，科学通报，21(1987)，1606—1608.

[73] 刘应明，层次结构，择一原则及其它，大自然探索，1(1989)，29—35.

[74] 刘应明，格上拓扑学与不分明拓扑学，四川大学学报(自然科学版)，3(1986)，43—52.

[75] 刘应明，不分明拓扑空间中完全正则性的点式刻划与嵌入定理，中国科学，8(1982)，675—682.

[76] Y. M. Liu, Intersection operation on union-preserving mappings in completely distributive lattices, J. Math. Anal. Appl., 84(1981), 249—255.

[77] Y. M. Liu, Inverse operation on union-preserving mappings in lattices and its application to fuzzy uniform spaces, Proc. 12th International Symposium of Multiple-valued logic, 1982, Paris, IEEE, 280—288

[78] Y. M. Liu, A Generation of fuzzy category and constructions of invertible elements in the fuzzy category, in: M. M. Gupta and E. Sanchez, Eds, Fnzzy Information and Decision Processes, North-Holland, 1982, 117—122.

[79] Y. M. Liu, Structures of fuzzy order homomorphisms, Fuzzy Sets and Systems, 21(1987), 45—52.

[80] 刘应明，罗懋康，诱导空间与不分明Stone-Cech紧化，中国科

学，4(1987)，360—368

[81] Y.M.Liu, M.K.Luo, Fuzzy Stone type compactifications, Fuzzy Sets and Systems, 33(1989), 355—372.

[82] Y. M. Liu, M.K.Lou, Lattice-valued Hahn-Dieudonne-Tong insertion theorem and stratification structure Topology and its Applications, 45(1992), 173—188.

[83] Y.M.Liu, M.K.Luo, Lattice-valued mapping, completely distributive law and induced spaces, Fuzzy Sets and Systems, 42(1991), 45—56.

[84] 刘应明，罗懋康，彭谦，完全分配律的分析式与拓扑式刻划，科学通报，15(1989)，1211—1213.

[85] 刘应明，何明，完全分配格上的诱导映射，科学通报，30(1985)，1203—1206.

[86] 刘应明，任平，模糊数学，上海教育出版社，上海，1989.

[87] 刘应明，蒋继光，点集拓扑学进展，自然科学年鉴，上海科学技术出版社，上海，1989.

[88] 罗承忠，模糊数学引论，北京师范大学出版社，北京，1990.

[89] 罗懋康，格上拓扑的点式处理—Locale理论中的Hausdorff性，Tietze扩充定理及其它，四川大学博士论文，1992.

[90] 马骥良，于纯海，模糊代数选论，学苑出版社，北京，1989.

[91] S.MacLane, Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, Berlin/New York/Heidelberg, 1971.

[92] E. G. Manes, Algebraic Theories, Springer-Verlag, Berlin/New York/Heidelberg, 1976.

[93] M. A. Main et al (editors), Mathematical Foundations of Programming Language Semantics, Lecture Notes in Computer Science, Vol.298, Springer-Verlag, Berlin/New York/Heidelberg, 1988.

[94] B.Mitchell, Theory of Categories, Academic Press, New York, 1965.

[95] K.Morita, J.Nagata(editors), Topics in General Topology,

North-Holland, Elsevier Science Publishing Co.Inc., Amsterdam/New York/Oxford, 1989.

[96] L.Nachbin, Topology and Order, D.Van Nostrant Co. Inc., Princeton, N.J.1965.

[97] J.-I.Nagata, Modern General Topology(3rd ed), North-Holland, Amsterdam/New York/Oxford, 1985.

[98] G.Nobeling, Grundlagen der Analytischen Topologie, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1954.

[99] D.Novak, Generalized of continuous posets, Trans.Amer, Math.Soc., Vol.272(1982), 645—667.

[100]裴礼文，Fuzzy格的分支构造，模糊系统与数学，1(1989)，56—64.

[101]L.W.Pei, L-Structure and its applications, Fuzzy Sets and Systems, 26(1988), 105—119.

[102]彭育威，完全分配格的并既约元的代数性质 及分子 格的构造，工程数学学报，2(1985)，114—117.

[103]彭育威，关于格值诱导空间的两个公开问题，数学学报，6(1992) 751—756.

[104]P.M.Pu and Y.M.Liu, Fuzzy Topology 1: Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergemce, J.Math.Anal.Appl., 76(1980), 571—599.

[105]P.M.Pu and Y.M.Liu, Fuzzy Topology 2: Product and quotient spaces, J.Math.Anal.Appl,, 77(1980), 20—39.

[106]蒲保明，蒋继光，胡淑礼，拓扑学，高等教育出版社，北京，1985.

[107]G.N.Raney, Completely distributive complete lattices, Proc.Amer.Math.Soc., 3(1952), 677—680.

[108]G.N.Raney, A subdirect-union representaion for completely distributive complete lattices, Proc. Amer. Math.Soc., 4(1953), 518—522.

[109]G. N. Raney , Tight Galois connections and completely distributivity, Trans.Amer.Math.Soc., Vol.97(1960), 418—

[110]H.Rasiowa, R.Sikorski, The Mathematics of metamathematics PWN, Warszawa, 1963.

[111]S. E. Rodabaugh, point-set lattice-theoretic topology, Fuzzy Sets and Systems, Vol.40(1991), 297—345.

[112]K.Rosenthal, Quantale and their Applications, Longmaa Scientific and Technical, London, 1990.

[113]V.N.Salii, Lattices with Unique Complements, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 69, American Mathematical Society, Providence, R.I.1987.

[114]D.S.Scott, Continuous Lattices, In Topoes, Algebraic Geometry and Logic, Lecture Notes in Math.Vol.274, Springer-Verlag, 1972, 97—136.

[115]史福贵，标准完全分配格的代数结构，数学研究与评论，2(1992), 292—294.

[116]F. G. Shi, Characterization of completely distributive lattices, Journal of Mathematics Research and Exposition, 1(1993), 154.

[117]时根保，王戈平，Φ拓扑，数学杂志，4(1990), 107—110.

[118]R.Sikorski, Boolean Algebras. Springer-Verlag, Berlin, 1964.

[119]H.Simmons, A framework for topology, Logic Colloquium, 77, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol.96, North-Holland Publishing Co., Amsterdam/New York/Oxford, 1978, 239—251.

[120]M. H. Stone, The theory of represention for Boolean algebras, Trans.Amer.Math., Vol.40(1936), 37—111.

[121]M.H.Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans.Amer.Math., Vol.41(1937), 375—481.

[122]孙国正，拓扑分子格上基数函数的讨论，陕西师范大学学报(自然科学版)，2(1986), 1—7.

[123]孙国正，子拓扑分子格，东北数学，2(1986)，395—402。
[124]孙叔豪，Locale的紧正则极不连通反射，四川大学学报(自然科学版)3(1988)，267—273。
[125]孙叔豪，Hausdorff分离性的Locale特征，四川大学学报(自然科学版)3(1987)，144—148。
[126]孙叔豪，Locale的Tychonoff乘积定理，四川大学学报（自然科学版)4(1987)，250—255。
[127]孙叔豪，Locale的紧零维反射，科学通报，13(1987)，961—963。
[128]孙叔豪，Locale的拓扑结构与Grothendieck广义层论，四川大学博士论文，1987。
[129]田晓明，王戈平，强Sober空间的一个范畴等价定理，数学杂志，2(1993)，169—174。
[130]S.Vickers, Topology via Logic, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
[131]H.Wallman, Lattices and topological spaces, Ann, Math., Vol.39(1938), 112—116.
[132]王彩华等，模糊论方法学，中国建筑工业出版社，北京，1988。
[133]王戈平，完全分配格上的弱辅助序与广义序同态，数学季刊，4(1988)，76—83。
[134]G. P. Wang, Induced I (L) -fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems, 43(1991), 69—80.
[135]王戈平，胡兰芳，φ-序同态及其在φ-连续格理论中的应用，数学研究与评论，12(1992)，361—365。
[136]王戈平，田晓明，一类完备格的直积分解与Fuzzy格的构造，数学学报，1(1993),45—52。
[137]王戈平，时根保，φ-归纳集范畴与偏序集的一个分类定理，数学年刊，1(1993)，111—117。
[138]王戈平，时根保，完全分配格与点格，数学学报，4(1993)，491—497。
[139]王国俊，L-Fuzzy拓扑空间论，陕西师范大学出版社，西安，1988。
[140]王国俊，完全分配格上的点式拓扑(I)，陕西师范大学学报（自然科学版)1(1985)，1—17，

[141]王国俊，完全分配格上的点式拓扑(II)，陕西师范大学学报(自然科学版)，21(1984)1297.

[142]王国俊，φ-极小集理论及其应用，科学通报，31(1986)，1049—1053.

[143]王国俊，完全分配格上的序同态，数学进展，1(1987)，55—60.

[144]王国俊，杨忠强，完全分配格上的极大族理论极其应用，工程数学学报，创刊号1984，63—68.

[145]王国俊，Heyting代数成为Boole代数的条件及其特征，陕西师范大学学报(自然科学版)4(1991)，1—6.

[146]王国俊，不分明拓扑学的若干研究方向，数学研究与评论，2(1987)，357—365.

[147]王国俊等，拓扑分子格理论，陕西师范大学出版社，西安，1990.

[148]王国俊，王灏，拟一致结构与拓扑，数学学报，2(1993)，207—216.

[149]王国俊，徐罗山，内蕴拓扑与Hutton单位区间的细致化，中国科学，7(1992)，705—712.

[150]G. J. Wang, Theory of topological molecular lattice, Fuzzy Set and Systems, 47(1992), 351—376.

[151]汪培庄，模糊集合论及其应用，上海科学技术出版社，上海，1983.

[152]汪培庄，格拓扑的邻元结构与收敛关系，北京师范大学学报(自然科学版)，1(1984)，35—40.

[153]吴从炘，马明，模糊分析学基础，国防工业出版社，北京，1991年.

[154]吴从炘，马明，Fuzzy拓扑代数与局部m凸Fuzzy拓扑代数，科学通报，21(1984)，1297.

[155]G.Q.Wu, C.Y.Zheng, Fuzzy boundary and Characteristic properties of order-homomorphisms, Fuzzy Sets and Systems, 89(1991), 329—337.

[156]O. Wyler, Algebraic theories of continuous lattices, Continuous Lattices, Lectures, Notes in Math. Vol.871, Springer-Verlag, Berlin/New York/Heidelberg 1981, 390—413.

[157]徐罗山，格与拓扑研究——范畴论方法与拓扑分解方法及应用，四川大学博士论文，1992.
[158]徐小湛，完全分配格上的拓扑结构，陕西师范大学学报(自然科学版)，1(1989)，1—5.
[159]徐晓泉，廿筱青，极小集与极大集理论的一个应用，中国系统工程学会模糊数学与模糊系统委员会第五届年会论文选集，西南交通大学出版社，成都1990，435—437.
[160]徐晓泉，完全分配格范畴中的乘积与上积及其结构，科学通报，9(1990)，643—646.
[161]L.X.Xuan, N-Sequential compactness, Fuzzy Sets and Systems, 35(1990), 93—100.
[162]杨乐成，Fuzz函数成为Zadeh型函数的充要条件，科学通报，9(1988)，715.
[163]杨乐成，保承集的Fuzzy序同态，模糊数学与系统，2(1988)，24—29.
[164]杨乐成，完全分配格上的p.q度量理论，科学通报，4(1988)，247—250.
[165]L. C. Yang, H. B. Cui and C. Y. Zheng, structures of support-preserving fuzzy order homomorphisms, Northeastern Mathematical Journal, 2(1991), 209—212.
[166]颜有守，分子格的几何刻画，陕西师范大学学报(自然科学版)，2(1987)，18-21.
[167]杨忠强，分子格范畴的Cartesian闭性，四川大学博士论文1990.
[168]杨忠强，Scott拓扑与上拓扑的一个注记，陕西师范大学学报(自然科学版)，4(1984)，23—26.
[169]杨忠强，拓扑分子格中的理想，数学学报，2(1986)，276—279.
[170]M. S. Ying, A new approach for fuzzy topology (I), Fuzzy Sets and Systems, 39(1991), 303—321.
[171]M. S. Ying, A new approach for fuzzy toPology (II), Fuzzy Sets and Systems, 47(1992), 292—294.
[172]M. S. Ying, A new approach for fuzzy topology (III),

Fuzzy Sets and Systems, 55(1993), 193—207.

[173]易耘，不分明拓扑的层次结构，数学学报，6(1991)，729—736.

[174]L.A.Zadeh, Fuzzy Sets, Inf.Cont., 8(1965), 338—353.

[175]张德学，Fuzzy单位区间与Fuzzy Stone表示定理，四川大学博士论文，1993.

[176]张德学，刘应明，L-fuzzy拓扑空间的弱诱导化，数学学报，1(1993)，68—73.

[177]D.X.Zhang, Y.M.Liu, A localic L-fuzzy modification of topological spaces Fuzzy Sets and Systems, 55(1993), 1—13.

[178]张杰，郑崇友，序列充分多的拓扑分子格的乘积与直积的若干性质，东北数学，3(1989)，338—342.

[179]张文修，王国俊，刘旺金，方锦暄，模糊数学引论，西安交通大学出版社，西安，1991.

[180]赵彬，分子格范畴中的极限及其应用，四川大学博士学位论文，1993.

[181]赵东升，Scott拓扑与Sober空间，科学通报，15(1985)，199.

[182]赵东升，连续格与完全分配格的几个特征，数学季刊，1—2(1990)，162—165.

[183]赵东升，逆序对合对应的构造，陕西师范大学学报（自然科学版），2(1989)，1—4.

[184]X. D. Zhao, Representation theorem of fuzzy lattices and its applications in fuzzy topology, Fuzzy Sets and Systems, 25(1988), 125—128.

[185]朱梧槚，肖奚安，数学基础与模糊数学基础，自然杂志，10(1984)，723—726.